トービンの貨幣的成長理論について

佐久間　敬

序

現実の経済は，いうまでもなく貨幣経済である。そのために貨幣を導入した経済モデルの構築が必要となる。成長理論においても，貨幣と結合したモデルが数多く提示されてきた。

トービンはこの分野における先駆的業積[6]をあげ，新古典派の貨幣的成長理論の基礎を築いた。トービン・モデルは，その後永谷[4]，Hadjimichalakis[2] 等により精緻化されたのである。この小論では，精緻化されたトービン・モデルについて恒常成長の解の存在，安定性，そして貨幣の非中立性という点から考察することにする。

I．実物的成長理論

トービンの貨幣的成長モデルの性格を明確にするために，ソロー型の実物的成長モデルについて述べておこう。ソロー型の成長モデルでは，次のような仮定がなされている[1]。

(1)一財経済の仮定：一種類の財しか生産されずに，それが投資にも消費にも使用される経済の想定を意味する。

(2)生産関数は *well-behaved* であるとする[2]：生産関数を

$$Y=F(K,N)$$

で表わす。ここでYは産出量，Kは資本，Nは労働量とする。この生産関

1）Solow[5] pp. 66–68 を参照。

2）ソローの論文[5]には，生産関数が *well-behaved* でない場合についても議論されている。

数には，１次同次性が仮定されているので

$$\frac{Y}{N}=F(\frac{K}{N},1)$$

となるが，$y\equiv\frac{Y}{N}, k\equiv\frac{K}{N}$とすれば

$$y=f(k)$$

と書ける。生産関数が *well-behaved* であるとは，以下の条件を備えていることである[3)]。

(a) $0<k<\infty$

(b) $f(k)>0$

(c) $f'(k)>0$

(d) $f''(k)<0$

(e) $\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$

(f) $\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$

(3)産出量のうち一定割合 $s(0<s<1)$ が貯蓄され，それはすべて投資される：時点 t における瞬間的な資本の増加量を$\frac{d}{dt}K(t)=\dot{K}(t)$ で表わせば，この仮定は

$$\dot{K}(t)=sY(t)$$

で書ける。

(4)労働の供給量は一定の率 $n(n>0)$ で増加しているものとする：時点 t の労働を $N(t)$ とすれば，時点 t における瞬間的な増加量は $\dot{N}(t)$ で表わせる。増加率は $N(t)$ を $\dot{N}(t)$ で割ったものだから，この仮定は

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}=n$$

と書ける。

(5)完全雇用が成立しているものとする。

(6)技術進歩は無視する。

3) Hadjimichalakis[2] p. 459 を参照。

以上をまとめると，ソロー型成長モデルは，つぎの方程式体系で表わされる。

(1-1)　$Y(t)=F(K(t),N(t))$

(1-2)　$\dot{K}(t)=sY(t)$

(1-3)　$\dfrac{\dot{N}(t)}{N(t)}=n$

(以後 (t) は省略する)

いま $k\equiv\dfrac{K}{N}$ の対数をとり，両辺を時間 t で微分することにより

(1-4)　$\dfrac{\dot{k}}{k}=\dfrac{\dot{K}}{K}-\dfrac{\dot{N}}{N}$

を得る。(1-4)式を

$$\dot{k}=k\frac{N}{K}\frac{\dot{K}}{N}-k\frac{\dot{N}}{N}$$

と変形し，(1-2)式の両辺を N で割った次式

$$\frac{\dot{K}}{N}=s\frac{Y}{N}=sf(k)$$

を代入すれば

$$\dot{k}=sf(k)-nk$$

となる。このように，3つの連立方程式からなるモデルは，1本の微分方程式に集約されたのである。

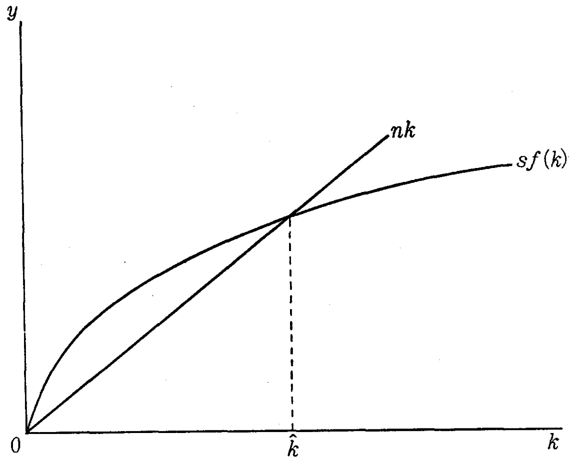
ここで，恒常成長の解の存在と安定性について述べてみよう。恒常成長の状態を

$$\frac{\dot{k}}{k}=0$$

と定義すれば，恒常成長の解 $\hat{k}$ は $\dot{k}=0$を満たす解である。生産関数の仮定(a)—(f)のもとでは第1図のようになり，$\hat{k}$ は存在する。

次に，$k\neq\hat{k}$ とすれば，k はどのように変動するか調べてみよう[4)]。$k>\hat{k}$

4) Solow[5] p. 70 を参照。



第 1 図

ならば，$nk>sf(k)$ であるので，$\dot{k}<0$ であり k は $\hat{k}$ に向って減少しつづける。また $k<\hat{k}$ ならば，$nk<sf(k)$ であるので，$\dot{k}>0$ であり k は $\hat{k}$ に向って増加しつづける。したがって，k は初期値にかかわらず $\hat{k}$ に向って収束するので，$\hat{k}$ は大域的に安定な均衡値である。

Ⅱ. トービン・モデル

ソロー型の成長モデルに，貨幣的要因が導入されているトービン・モデルでは，次のような仮定がなされている[5)]。

(i)生産関数は *well-behaved* であるとする。

(ii)生産要素市場は完全競争であるとする。

(iii)人々は物価の変化率を正確に予想するものとする：この仮定は，いわゆる「完全近視眼的予測[6)]」(*perfect myopic foresight*) の仮定である[7)]。

---

5) Hadjimichalakis[2] pp. 459–460, 463–464, 鴇田[8] pp. 98–102 を参照。

6) Burmeister＝Dobell[1] p. 163 を参照。

7) この仮定がトービン・モデルの特徴の一つであるが，トービン自身はこの仮定の場合のみに限って分析していたわけではない。Tobin[7] p. 683 を参照。

$\frac{\dot{P}}{P}$を現実の物価上昇率，π_e を予想物価上昇率とすればこの仮定は

$$\pi_e=\frac{\dot{P}}{P}$$

で表わされる。

(iv)貨幣に対する需要関数は１人当り産出高の 増加関数であり，機会費用の減少関数である：貨幣を保存する動機には(a)取引動機と(b)資産保有動機とがある。(a)の場合には貨幣の需要関数は１人当りの産出高 $f(k)$ の増加関数とみなすことができる。

(b)の場合には，機会費用の減少関数とみなされる。この点について若干述べておこう[8)]。仮定(ii)より，資本の 実質収益率 r は

$$r=f'(k)$$

である。貨幣の実質期待収益率は

$$-\pi_e$$

であるので，貨幣保有の機会費用は

$$f'(k)-(-\pi_e)=f'(k)+\pi_e$$

となる。資本と貨幣が不完全な代替資産の場合[9)]，機会費用が 増大すれば貨幣の保有は減少する。

(a)，(b)をまとめると

$$L=\Phi(f(k),f'(k)+\pi_e),\Phi_1>0,\Phi_2<0$$

となる。この式は

$$L=L(k,\pi_e),L_1>0,L_2<0$$

と書き換えうる[10)]。

8）Hadjimichalakis[2] pp. 463–464 を参照。
9）資本と貨幣が完全な代替資産ならば，機会費用がプラスである限り，資本が保有される。
10）L は k と π_e の関数であり，L_1, L_2 の符号は

$$L_1=\frac{\partial L}{\partial k}=\Phi_1 f'(k)+\Phi_2 f''(k)>0$$

$$L_2=\frac{\partial L}{\partial \pi_e}=\Phi_2<0$$

となる。

(ｖ)貨幣の供給量は一定の率 $\mu(\mu>0)$ で増加するものとする：貨幣供給の瞬間的な増加量を $\dot{M}$ とすれば，貨幣供給の増加率 μ は

$$\frac{\dot{M}}{M}=\mu$$

で表わされる。

(vi)貨幣市場は常に均衡が成立している：この仮定は

$$\frac{M}{PN}\equiv m=L(k,\pi_e)$$

で表わせる。

(vii)投資は常に実物貯蓄に等しい：実物貯蓄 S は実質可処分所得を Y_d とすれば

$$S=Y-(1-s)Y_d$$

で定義される。実質可処分所得 Y_d は

$$Y_d=Y+\left(\frac{\dot{M}}{P}\right)$$

$$=Y+(\mu-\pi_e)\frac{M}{P}$$

で定義されるので[11]，実物貯蓄は

$$S=sY-(1-s)(\mu-\pi_e)\frac{M}{P}$$

となる。したがって，上記の仮定は

$$\dot{K}=sY-(1-s)(\mu-\pi_e)\frac{M}{P}$$

で表わされる。

(viii)労働の供給量は一定の率 n で増加しているものとする。

(ix)完全雇用が成立しているものとする。

(ｘ)技術進歩は無視する。

以上をまとめると，トービン・モデルはつぎの方程式体系で表わされる。

11) Levhari＝Patinkin[3] p. 714 を参照。

(2-1) $Y=F(K,\ N)$

(2-2) $\dfrac{M}{PN}=L(k,\ \pi_e)$

(2-3) $\dfrac{\dot{M}}{M}=\mu$

(2-4) $\dfrac{\dot{N}}{N}=n$

(2-5) $\dot{K}=sY-(1-s)(\mu-\pi_e)\dfrac{M}{P}$

(2-6) $\pi_e=\dfrac{\dot{P}}{P}$

いま $k\equiv\dfrac{K}{N}$の対数をとり，両辺を時間 t で微分すれば

(2-7) $\dfrac{\dot{k}}{k}=\dfrac{\dot{K}}{K}-\dfrac{\dot{N}}{N}$

となる。(2-7)式を

$$\dot{k}=k\frac{\dot{N}}{K}\ \frac{K}{N}-k\frac{\dot{N}}{N}$$

と変形し，(2-5)式の両辺を N で割った次式

$$\frac{\dot{K}}{N}=s\frac{Y}{N}-(1-s)(\mu-\pi_e)\frac{M}{PN}$$
$$=sf(k)-(1-s)(\mu-\pi_e)m$$

を代入すれば，

(2-8) $\dot{k}=sf(k)-(1-s)(\mu-\pi_e)m-nk$

となる。

同様に，$m\equiv\dfrac{M}{PN}$の対数をとり，両辺を時間 t で微分すれば

$$\frac{\dot{m}}{m}=\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\dot{P}}{P}-\frac{\dot{N}}{N}$$

となる。これより

(2-9) $\dot{m}=m(\mu-\pi_e-n)$

が得られる。

いま $\pi_e \equiv \Phi(k,\ m)$ と定義すれば[12)]，(2-8) 式と(2-9)式は

(2-10) $\dot{k} = sf(k) - (1\text{-}s)[\mu - \Phi(k,m)]m - nk$

(2-11) $\dot{m} = m[\mu - \Phi(k,m) - n]$

となる。このように，6つの連立方程式からなるモデルは，2本の微分方程式に集約されたのである。

Ⅲ. 存在と安定性

恒常成長の状態を

$$\frac{\dot{k}}{k} = 0$$

$$\frac{\dot{m}}{m} = 0$$

で定義すれば，恒常成長の解 $(k^*,\ m^*)$ は(2-10)式と(2-11)式の左辺を0として得られる。k^* と m^* を(2-10)式と(2-11)式の左辺を0とした方程式に代入すれば

(3-1) $\Phi(k^*,\ m^*) = \mu - n$

(3-2) $sf(k^*) - nk^* = (1\text{-}s)nm^*$

となる。$\dot{k}=0$ の曲線と $\dot{m}=0$ の曲線は第2図のように示され[13)]，k^* は存在する[14)]。

つぎに，恒常成長の解 $(k^*,\ m^*)$ の近傍における安定性を考えてみよう[15)]。(2-10)式と(2-11)式の右辺を $(k^*,\ m^*)$ でテイラー展開し，2次以上の項を無視すれば

(3-3) $\dot{k} = [sf'(k^*) + (1\text{-}s)\Phi_k m - n](k - k^*) - (1\text{-}s)[\mu - \Phi(k^*,\ m^*) - m\Phi_m](m - m^*)$

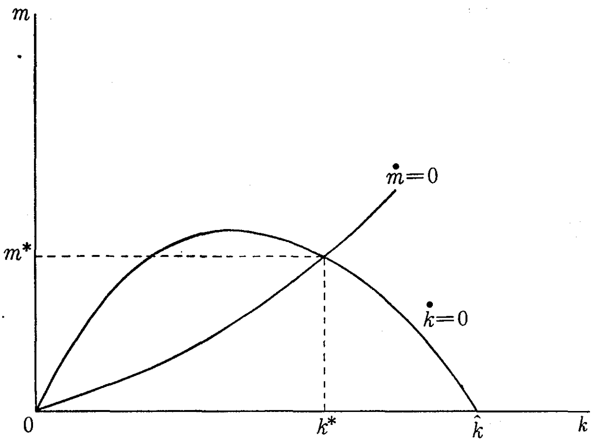
---

12) π_e は $m = L(k,\ \pi_e)$ から得られるので，k と m の関数と考えられる。

13) 曲線の形状についての議論は Hadjimichalakis[2] p. 472 を参照。$\hat{k}$ はソロー型の成長モデルの恒常成長における資本集約度である。

14) 解の存在の形式的議論については Burmeister＝Dobell[1] pp. 173–177を参照。

15) Hadjimichalakis[2] pp. 471–472 を参照。



第 2 図

$$(3\text{-}4)\quad \dot{m}=-m\Phi_k(k-k^*)+[\mu-m\Phi_m-\Phi(k^*,\ m^*)-n](m-m^*)$$

となる。(3-1)式と(3-2)式を(3-3)式と(3-4)式に代入すれば

$$\dot{k}=[sf'(k^*)+(1\text{-}s)\Phi_k m-n](k-k^*)-(1\text{-}s)(n-m\Phi_m)(m-m^*)$$

$$\dot{m}=-m\Phi_k(k-k^*)-m\Phi_m(m-m^*)$$

となる。ここで

$$A=\begin{bmatrix} sf'+(1-s)\Phi_k m-n & -(1-s)(n-m\Phi_m) \\ -m\Phi_k & -m\Phi_m \end{bmatrix}$$

として，trace A と det A の符号を調べてみよう。

$$\text{trace}\ A=sf'+(1-s)\Phi_k m-n-m\Phi_m$$

$$\det\ A=-m\Phi_m\left[\left(\frac{\Phi_k}{\Phi_m}\right)(1-s)(n-m\Phi_m)+sf'+(1-s)\Phi_k m-m\right]$$

$$0<s<1$$

$$f'>0$$

$$m>0$$

$$n>0$$

$\Phi_k > 0$[16)]

$\Phi_m < 0$[17)]

であるが，$sf' + (1-s)\Phi_k m - n$ の符号は $\dot{k}=0$の曲線の傾きに依存している。$\dot{k}=0$の曲線の傾きは

$$\left.\frac{dm}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = \frac{sf' + (1-s)m\Phi_k - n}{(1-s)(\mu - \Phi - m\Phi_m)}$$

である。分母は正なので[18)]，$\dot{k}=0$の曲線の傾きが正の部分では

$sf' + (1-s)m\Phi_k - n > 0$

であり，傾きがゼロまたは負の部分では

$sf' + (1-s)m\Phi_k - n \leqq 0$

である。

したがって，$\dot{m}=0$ の曲線と $\dot{k}=0$ の曲線の正の傾きの部分で交わるときは

trace $A > 0$

となり，均衡は不安定である。またゼロまたは負の傾きの部分で交わるときには

det $A < 0$

となり，均衡は鞍点となる。

Ⅳ．貨幣の非中立性

貨幣の存在が恒常状態における資本集約度に影響するかどうか先ず考えてみよう。ソロー型の実物的成長モデルでは，恒常状態における資本集約度 $\hat{k}$ は

---

16) $m = L(k, \Phi(k, m))$から $\dfrac{\partial m}{\partial k}$を求めると，$L_1 + L_2\Phi_k = 0$となり $\Phi_k > 0$.

17) $m = L(k, \Phi(k, m))$から $\dfrac{\partial m}{\partial m}$ を求めると $L_2\Phi_m = 1$ となり $\Phi_m < 0$.

18) $\hat{k} < k$ のとき，$sf(k) - nk > 0$ であるから，$(1-s)[\mu - \Phi(k, m)]m = sf(k) - nk > 0$ となり，$\mu - \Phi > 0$ であることがわかる。

$$(4-1)\quad n\hat{k}=sf(\hat{k})$$

であった。トービンの貨幣的成長モデルにおける恒常状態の資本集約度 k^* は

$$(4-2)\quad nk^*=sf(k^*)-(1-s)nm^*$$

$$=\left[s-\frac{(1-s)nm^*}{f(k^*)}\right]f(k^*)$$

であった。(4－1)式と(4－2)式を比較してみると

$$s-\left[s-\frac{(1-s)nm^*}{f(k^*)}\right]$$

$$=\frac{(1-s)nm^*}{f(k^*)}>0$$

となる。このように恒常状態での資本集約度が実物経済よりも貨幣経済における方が低いことがわかった。このことは「第1種の貨幣の非中立性」と呼ばれている[19]。

つぎに貨幣供給量の増加率 μ の恒常状態での資本集約度に対する効果をみてみよう[20]。恒常状態では

$$\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)=\mu-n$$

$$m^*=L(k^*,\mu-n)$$

である。これを(3－2)式に代入し，全微分すれば

$$\frac{dk^*}{d\mu}=\frac{(1-s)nL_2}{sf'-(1-s)nL_1-n}$$

となる。$sf'-n$ の符号は，均衡が鞍点であることから

$$sf'-n<0$$

である[21]。したがって，

19) Hadjimichalakis[2] p. 457 を参照。Levhari＝Patinkin[1] は，この命題が必ずしも妥当しないことを異なった仮定により証明している。

20) Hadjimichalakis[2] p. 476 を参照。

21) 均衡が鞍点のときには，$sf'-n+(1-s)m\Phi_k<0$ であった。$(1-s)m\Phi_k>0$ であるので $sf'-n<0$ となる。

$$\frac{dk^*}{d\mu}>0$$

となる。このように貨幣の供給量の変化率が恒常状態での資本集約度に影響することを「第2種の貨幣の非中立性」と呼ぶ[22)]。

参 考 文 献

[1] Burmeister, E. and R. Dobell, "Money and Economic Growth," Chapter VIII in *Mathematical Theories of Economic Growth* (Macmillan, 1968).

[2] Hadjimichalakis, M. G., "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money—the Tobin Models," *Review of Economic Studies*, Vol. 38, Oct. 1971, pp. 459–479.

[3] Levhari, D. and D. Patinkin, "The Role of Money in a Simple Growth Model," *American Economic Review*, Vol. 58, Sept. 1968, pp. 713–753.

[4] Nagatani, K., "A Note On Professor Tobin's Money and Economic Growth," *Econometrica*, Vol. 38, Jan. 1970. pp. 171–175.

[5] Solow, R. M. "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, Feb. 1956, pp. 65–94.

[6] Tobin, J., "A Dynamic Aggregate Model," *Journal of Political Economy*, Vol. 63, Apr. 1955, pp. 103–115.

[7] Tobin, J., "Money and Economic Growth," *Econometrica*, Vol. 33, Oct. 1965, pp. 671–684.

[8] 鴇田忠彦『マクロ・ダイナミックス』東洋経済 1976年.

22) Hadjimichalakis[2] p. 467 を参照。