

# ベイジアンアプローチによる単位根検定

河 田 正 樹

## 1 はじめに

時間領域における時系列モデル分析において、平均非定常な系列を定常系列に変換する方法として、階差をとる方法と、線形トレンドをあてはめる方法とがあるが、誤った方法を用いた場合には分析結果がかなり変わってしまう。そこで、系列が階差定常であるかどうかを検定する単位根検定といわれる方法が考えられている。

単位根検定には、帰無仮説および対立仮説として選ぶモデルに複数の組み合わせがある。階差定常モデルを帰無仮説とし、トレンド定常モデルを対立仮説とするもの、トレンドを含む階差定常モデルを帰無仮説とし、トレンド定常モデルを対立仮説とするものなどがその組み合わせの例である。そのなかで、階差定常モデルを帰無仮説とし、定常モデルを対立仮説とする組み合わせがある。1次の自己回帰 (Auto Regressive: AR) モデルの場合でいえば、

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \quad (1)$$

というモデルで、 $\rho = 1$ であるかどうかの検定を行うものであり、 $\rho = 1$ のときのモデルはランダムウォークモデルといわれる。

単位根検定を伝統的アプローチ<sup>1)</sup>で行う場合、 $\rho$ が1となるときのみ、その漸近分布が異なり、それゆえ不都合が生じる。この不都合を解決するために、Sims [18] は、一様な事前分布を用いたベイジアンアプローチを行った。

---

注1) 本稿ではノンベイズのアプローチを伝統的アプローチと呼ぶことにする。

この方法に対し、Phillips [15] は、Sims [18] の方法では、事前分布に時系列の成り立ちを考慮に入れていないと痛烈に批判し、Jeffreys 型の事前分布を用いることを主張した。この批判に端を発し、事前分布としてどのような分布を用いれば良いのかについての論争がおこった<sup>2)</sup>。

本稿では、ベイジアンアプローチによる単位根検定の方法についての考察を行う。ベイジアンアプローチにおける仮説検定の方法には、事後オッズ比による方法が考えられ、本稿では (1) 式のような定数項なしの AR(1) モデルについての、事後オッズ比による単位根検定を考察の対象とする。そもそも単純帰無仮説についての検定は、伝統的アプローチとベイジアンアプローチで結果が大きく異なるという Lindley のパラドックスといわれる問題がある。Schotman and van Dijk [16] はこのパラドックスを回避するような事前分布を提案した。本稿では単位根検定における Lindley のパラドックスの問題、そしてそれを回避しようとした Schotman and van Dijk [16] の事前分布は妥当であるかという問題を中心に考察を進めていく。

次節以降の内容は次の通りである。2 節では単純帰無仮説の検定法について、伝統的アプローチとベイジアンアプローチのそれぞれについて簡単にまとめる。3 節では単純帰無仮説の検定における伝統的アプローチとベイジアンアプローチの結果の相違、Lindley のパラドックスについて触れる。4 節では伝統的アプローチの問題点である漸近分布の不連続性と、その仮説検定の考え方に触れ、5 節はこれらの問題点を解決できる、事後オッズ比を用いたベイジアン単位根検定の方法についてまとめる。6 節ではシミュレーション実験から得たその結果について示すとともに、若干の考察を加え、7 節で総括する。

## 2 単純帰無仮説の検定

(1) 式のような定数項なしの AR(1) モデルにおける単位根検定は、 $\rho = 1$

---

2) 河田 [7] では、この論争についてのサーベイをおこなった。

であるかどうかを検定するものであり、

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta \neq \theta_0$$

という、単純帰無仮説を複合対立仮説に対して検定する検定の1つの例である。

伝統的アプローチの統計的推論では、母数 $\theta$ を定数とみなし、得られるデータ $x$ を確率変数とみなす。仮説検定は、あらかじめ有意水準 $\alpha$ を定め、データから計算された母数推定値 $\hat{\theta}$ が、 $\theta_0$ まわりの $100(1-\alpha)\%$ の区間内に入るかどうかによって検定を行う。

有意水準 $\alpha$ には通常、0.05や0.01といった小さな値が用いられる。これは、帰無仮説を棄却するにはかなり決定的な証拠が必要であると考えられているからである。

一方、ベイジアンは、母数 $\theta$ を確率変数とみなすので、事後分布 $p(\theta|x)$ から、帰無仮説の成立する確率( $p_0$ )および、対立仮説の成立する確率( $p_1$ )が直接計算できる。仮説検定の1つの方法に、事後オッズ比 $\frac{p_0}{p_1}$ の大きさによって行うものがあり、 $\frac{p_0}{p_1} > 1$ の場合には帰無仮説を採択し、 $\frac{p_0}{p_1} < 1$ の場合には対立仮説を採択するというものがある。

この事後オッズ比による仮説検定は、伝統的アプローチの場合と異なり、帰無仮説と対立仮説のうち、その確率が高い方を採択するというもので、帰無仮説と対立仮説は同等に扱われている。

また、帰無仮説の成立する事前確率( $\pi_0$ )と、対立仮説の成立する事前確率( $\pi_1$ )との事前オッズ比 $\frac{\pi_0}{\pi_1}$ で、事後オッズ比を除いたもの、

$$B = \frac{p_0/p_1}{\pi_0/\pi_1} = \frac{p_0\pi_1}{p_1\pi_0}$$

をベイズファクターというが、ベイズファクターが1より大きいかどうかによって仮説検定を行う方法もある。ベイズファクターによる仮説検定は、データを入れることによって帰無仮説の成立する確率が増したかどうかを判断

するものである<sup>3)</sup>。

単純仮説 vs. 複合仮説の仮説検定において、帰無仮説の成立する確率は  $P(\theta = \theta_0 | x)$  であり、 $\theta$  の事後分布が連続型である場合、これは 0 となってしまふ。この問題を解決する手段としては、帰無仮説を  $H_0: \theta \in (\theta_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon)$  とし、 $P(\theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon | x)$  を考える。もしくは、事後分布を  $\theta_0$  のところのみ、離散型とする、すなわち  $\theta$  の事前分布を

$$p(\theta) = \begin{cases} \pi_0 & (\theta = \theta_0 \text{ のとき}) \\ (1 - \pi_0)g(\theta) & (\theta \neq \theta_0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2)$$

とすることが考えられる。

このとき、事後オッズ比は

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{\pi_0 p(x | \theta = \theta_0)}{(1 - \pi_0) \int_{\theta \neq \theta_0} g(\theta) p(x | \theta)} \quad (3)$$

となる。

### 3 Lindley のパラドックス

単純仮説 vs. 複合仮説の仮説検定では、伝統的アプローチとベジアンアプローチでその結果が大きく異なることが知られている。この問題は、Jeffreys [6] が考え、それを Lindley [11] がパラドックスとして指摘したもので、Lindley のパラドックス、または Jeffreys のパラドックスといわれる。

$$X_i \sim N(\theta, \phi), \text{ i.i.d. } (\phi \text{ は既知}) \quad (4)$$

---

3) ベジアンアプローチにおける仮説検定には、他にも事後分布の最高事後密度区間に  $\theta_0$  が含まれるかどうかで検定を行う Lindley の方法などがある。Lindley の方法は伝統的アプローチとベジアンアプローチの結果が大きく異なるため、その妥協的方法として考えられたものである。

という状況を考え、標本平均  $\bar{X}$  を推定値として、 $H_0: \theta = \theta_0$  という仮説検定を行うとしよう。

$H_0$  の事前確率  $\pi_0 = 0.5$  とし、対立仮説のもとでの事前分布を  $g(\theta) \sim N(\mu, \phi)$  としたならば、推定値として伝統的アプローチにおける臨界値を得た場合の  $H_0$  の事後確率  $p_0$  はそれぞれ次の表1のようになる<sup>4)</sup>。

表1 事後確率  $p_0$

$\alpha$	$z$	n						
		1	5	10	20	50	100	1000
0.1	1.645	0.418	0.442	0.492	0.558	0.655	0.725	0.891
0.05	1.960	0.351	0.331	0.367	0.424	0.521	0.600	0.823
0.01	2.576	0.212	0.134	0.140	0.163	0.216	0.273	0.535
0.001	3.291	0.086	0.026	0.024	0.026	0.034	0.045	0.124

ここで、 $z = |\bar{X} - \theta_0| / \sqrt{(\phi/n)}$  であり、第1列の有意水準  $\alpha$  の伝統的アプローチにおける両側臨界値に対応している。

この表から、標本数  $n = 50$  のとき、 $z = 1.96$  に対応する  $\bar{X}$  を得たとする。このとき、伝統的アプローチでは、有意水準  $\alpha = 0.05$  で帰無仮説を棄却するのに対し、ベイジアンアプローチでは  $p_0$  の値が0.521となり、事後オッズ比による仮説検定で帰無仮説が採択されてしまう。これが Lindley のパラドックスである。この伝統的アプローチとベイジアンアプローチの乖離は標本数  $n$  の増加とともに大きくなっている。

この問題について、Lindley [11] は対立仮説のもとでの事前分布として一様分布を、Jeffreys [6] はコーシー分布をそれぞれ用いたが、ほぼ同様の結果となった。これらは乖離が事前分布によらずに起こることを示している<sup>5)</sup>。

4)  $p_0$  の導出の詳細については、Lee [10] pp. 127-129. などに示されている。

5) この問題については Berger and Delampady [1] においていくつかの考察が行われている。

#### 4 伝統的アプローチにおける単位根検定

伝統的アプローチにおいて、仮説検定は区間推定と密接に関連しており、点推定値  $\hat{\theta}$  まわりの  $100(1-\alpha)\%$  信頼区間をとった区間推定値を考えた場合、この区間内に  $\theta_0$  が含まれていれば、通常は  $H_0: \theta = \theta_0$  という帰無仮説は採択される。

しかし、Dickey=Fuller 流の単位根問題に対するアプローチでは、 $\rho = 1$  のときのみ、その漸近分布が特殊な分布にしたがうという不連続性のため、このような性質は成り立たない。

たとえば、標本数  $T = 100$  の時系列データを定数項なし、トレンドなしの AR(1) モデルを用いて、最小二乗法で推定し、

$$y_t = 0.9096 \times y_{t-1} + u_t \quad (5)$$

(0.04177)

という結果を得たとしよう (カッコ内の数値は標準誤差を表す)。このとき、 $\hat{\rho}$  まわりの  $95\%$  信頼区間は  $(0.8269, 0.9923)$  となり、区間推定値の中に  $\rho = 1$  は含まれない。しかし、 $H_0: \rho = 1$  という仮説検定を行う場合、 $\theta_0 = 1$  まわりの  $95\%$  信頼区間は  $(0.8411, 1.003)$  となり<sup>6)</sup>、帰無仮説を採択することになる。

このような漸近分布の不連続性による矛盾はベイジアンアプローチにおいては存在しない。以下で示す図1から図4までは、次節で示すシミュレーション実験の結果求められた、 $T = 100$  のときの経験分布であるが、伝統的アプローチ、すなわち  $\hat{\rho} | \rho$  の分布が  $\hat{\rho} | \rho = 0.9$  (図1) と  $\hat{\rho} | \rho = 1$  (図2) では、ともに左右非対称はあるが、 $\rho = 1$  に近づくにつれて、その度合いが強まっている。一方、ベイジアンアプローチ  $\rho | \hat{\rho}$  の分布は  $\rho | \hat{\rho} = 0.9$  (図3) と  $\rho | \hat{\rho} = 1$  (図4) では、散らばりの度合いは異なるものの、 $\hat{\rho} = \rho$  に関して左右対称な分布になっている。

6)  $\rho = 1$  の場合の信頼区間の算出には、Fuller [4] p. 641の  $t$  分布表を用いた。

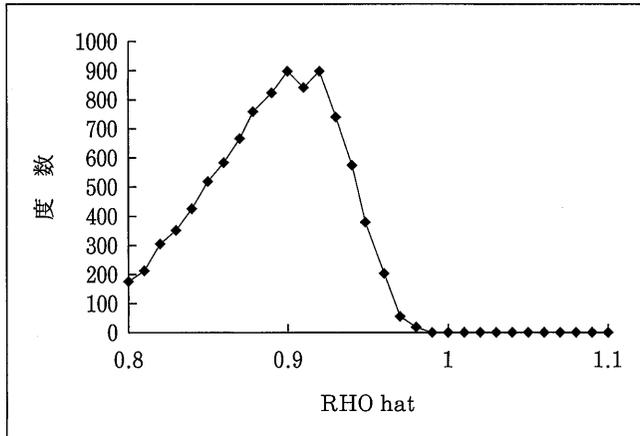


図1  $\hat{\rho} | \rho = 0.9$  の経験分布 ( $T=100$ )

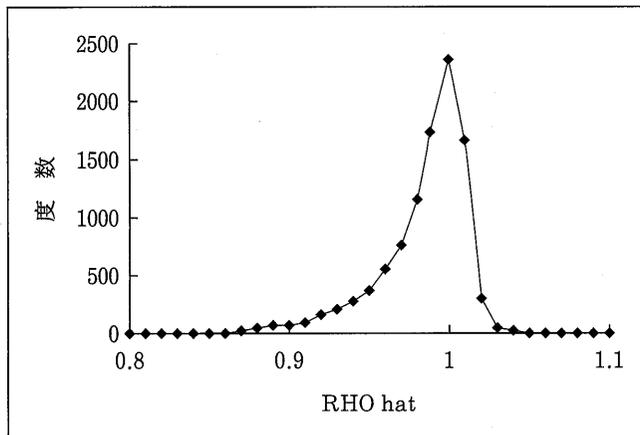


図2  $\hat{\rho} | \rho = 1$  の経験分布 ( $T=100$ )

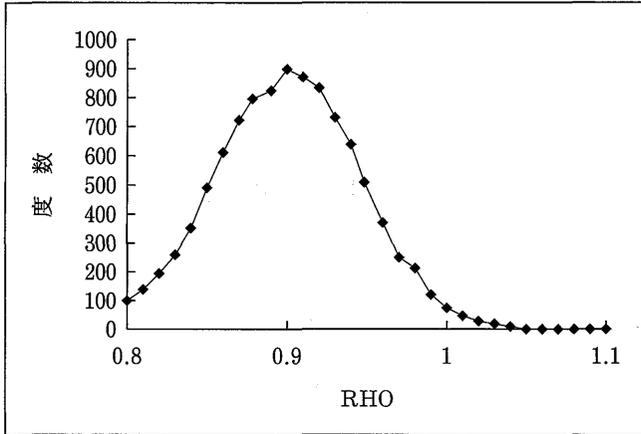


図 3  $\rho | \hat{\rho} = 0.9$  の経験分布 ( $T=100$ )

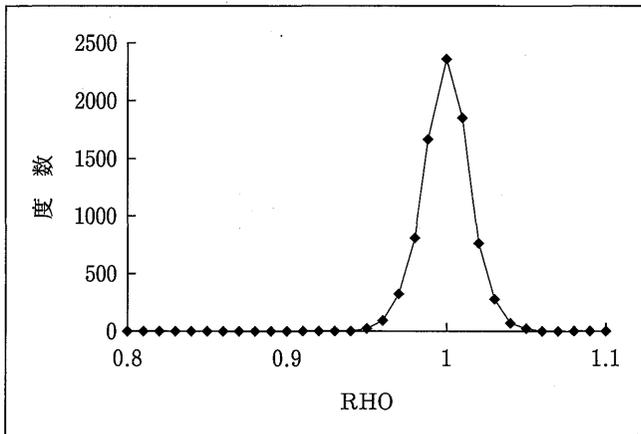


図 4  $\rho | \hat{\rho} = 1$  の経験分布 ( $T=100$ )

理論的には $\rho < 1$ の場合には、その分布が漸近的に正規となることが知られている<sup>7)</sup>。しかし、この図1の結果から、このことははっきりとはわからない。T = 500の場合について、 $\hat{\rho} | \rho = 0.9$ と $\hat{\rho} | \rho = 1$ を示したのが次の図5、図6である。

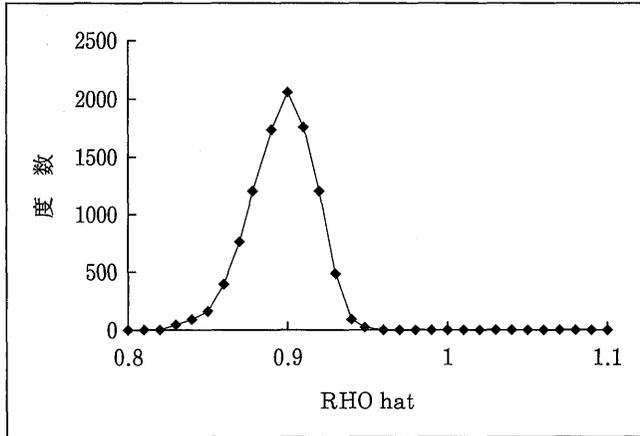


図5  $\hat{\rho} | \rho = 0.9$  の経験分布 (T=500)

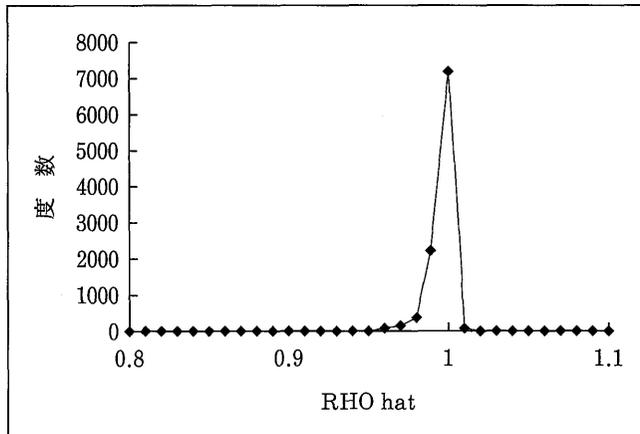


図6  $\hat{\rho} | \rho = 1$  の経験分布 (T=500)

7) たとえば, Hamilton [5] Chapter 8などで示されている。

これらの図からは $\rho < 1$ の場合にはその分布が漸近的に正規となるが、 $\rho = 1$ の場合のみ特殊な分布となることがわかる。この漸近分布の特殊性によって、伝統的アプローチの仮説検定は、モデルが単位根を含むという帰無仮説を棄却しにくくなっている。

また、伝統的アプローチでは、帰無仮説を否定する場合には強い証拠が必要となる。すなわち、このモデルの場合には「ランダムウォークモデルでない」という強い証拠がなければ定常なモデルである（対立仮説の立て方によっては非定常なモデルである場合も含む）という結論を得ることができない。真のモデルがランダムウォークモデルである場合は、それほど多いのであろうかという疑問が生じる。この疑問も帰無仮説と対立仮説を対等に扱うことができ、先験的な情報も事前分布の形で取りこむことのできる、ベイジアンアプローチでの単位根検定をおこなう動機づけとなっている。

## 5 ベイジアンの単位根検定

(1) 式のようなモデルの単位根検定を、ベイジアンアプローチでおこなったものとしては、Sims [18], Schotman and van Dijk [16] などがある。これらは事後オッズ比に基づく仮説検定を用いているが、このような仮説検定では、事前分布としてどのような分布を選択するかが問題となる。

$\rho$  に関して無知の状態を表す事前分布としては、その範囲が  $-\infty$  から  $\infty$  までをとり得るので、一様分布を用いることが考えられる。これは、Jeffreys の基準といわれるもので、「ごくふつうの場合であればおおむね成立する」<sup>8)</sup> としたものである。しかし、 $-\infty$  から  $\infty$  までの一様分布は積分しても 1 に等しくならない変則 (improper) 事前分布である。このような事前分布を用いたならば事後オッズ比は計算することができない。その解決策としては、ある範囲内での一様分布を考えることがあげられる。

Sims [18] は、標本数  $T$  が大きい場合の漸近的な事後オッズ比を考えた。

---

8) Jeffreys [6] p. 117. 訳語は Zellner [23] 邦訳47ページによる。

(2) 式のような事前分布で、尤度の大部分が含まれる区間をカバーするものとして  $g(\theta)$  に、まず  $(0.5, 1)$  の範囲の一様分布を考えた。このとき、 $\pi_0$  の値を  $0.5$  とすると、Dickey=Fuller 流の  $t$  値タイプの検定統計量  $\tau = \frac{1-\hat{\rho}}{\sigma_\rho} = 2$  (ただし  $\sigma_\rho = \sqrt{\sigma^2 / \sum y_{t-1}^2}$ ) と、事後オッズ比が  $1$  をともに満たす、すなわち伝統的アプローチとベイジアン漸近的な事後オッズ比によるアプローチが同一の結果となるような  $\hat{\rho}$  の値は  $\hat{\rho} = 0.92$  のときである。また、 $\pi_0$  の値を  $0.8$  とするなら<sup>9)</sup>、 $\hat{\rho}$  の値は  $1$  に近づくことになる。

Sims [18] はさらに、データの発生間隔にも注目した。年次データについて  $g(\theta)$  に  $(0.5, 1)$  の範囲の一様分布を考えた場合、四半期データでは下限が  $0.5^{1/4} = 0.84$ 、月次データの場合には  $0.5^{1/12} = 0.94$  となる。このとき、 $\tau = 2$  と事後オッズ比が  $1$  をともに満たす  $\hat{\rho}$  は四半期データの場合  $\hat{\rho} = 0.98$ 、月次データの場合  $\hat{\rho} = 0.99$  であることを示した。

Schotman and van Dijk [16] もやはり、事前分布として  $(a, 1)$  の区間に一様分布を用いるものを考えた。Schotman and van Dijk [16] では、 $a$  の値はあらかじめ決めておくのではなく、事前分布の範囲内に尤度関数の大部分を含むようにデータから決めることを提唱した。このことによって、標本数  $T$  が大きくなるにつれて、事前分布の範囲も小さくなり、Lindley のパラドックスを避けられると考えた。

$a$  の値は

$$a^* = \hat{\rho} + s_\rho F^{-1}(\alpha F(-\hat{\tau})) \quad (6)$$

となる  $a^*$  を用いる。ここで  $F(\cdot)$  は  $t$  分布の累積密度関数を表し、自由度は標本数  $T$  のとき  $T-1$  となる。 $s_\rho$  は  $\hat{\rho}$  の標準誤差であり、 $\hat{\tau}$  は Dickey=Fuller の検定統計量  $\hat{\tau} = (\hat{\rho}-1)/s_\rho$  である。 $0.001$  から  $0.1$  までの範囲の  $\alpha$  を入れることにより、尤度関数の  $\rho = 1$  以下の部分のうち、 $(1-\alpha)$  だけを事前分布がカバーすることになる。

このとき、事後オッズ比は

---

9) Sims [18] はこちらの場合のほうがより理にかなったものであると考えている。

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{p(\rho = 1 | X)}{\frac{1}{1-a} \int_a^1 p(\rho | X) d\rho} \quad (7)$$

となる。また、 $p(\rho = 1 | X)$ としては、 $\lim_{\rho \rightarrow 1} p(\rho | X)$ を用いている。

Sims [18] や Sims and Uhlig [20] で提唱された一様な事前分布を用いたベイジアンアプローチでは、 $\pi_0$ としてどういう値をとるのか、一様分布の範囲をどの程度とするのかが問題となってくる。この点について次節でシミュレーション実験の結果を用いて考察していく。

## 6 シミュレーションによる検証

本稿では、Sims and Uhlig [20] によって行われた次のようなシミュレーションと同様の実験を行った<sup>10)</sup>。

- Step 1*  $T$  個の平均 0, 分散 1 の正規乱数を発生させてそれを  $u_i$  とし, この  $u_i$  を用いて  $y_i$  を生成する。(ただし  $y_0 = 0$  とする。)
- Step 2* 標本数  $T$  の系列  $y_i$  に最小二乗法を適用し, 推定値  $\hat{\rho}$  を求める。
- Step 3* *Step 1*, *Step 2* の操作を 10000 回繰り返す,  $\hat{\rho}$  の条件付き分布を求める。
- Step 4* *Step 1*, *Step 2*, *Step 3* の操作を  $\rho$  について 0.80 から 1.10 の間の 0.01 刻みの値について行い,  $\rho$  と  $\hat{\rho}$  の同時分布を求める。

このような手順を踏み,  $\hat{\rho}$  の階級幅を  $[-\infty, 0.795)$ ,  $[0.795, 0.805)$ ,  $[0.805, 0.815)$ , ... として度数を求めた。 $\hat{\rho}$  は, 各階級の中央値によって代表させており, 例えば  $\hat{\rho} = 0.95$  とは,  $0.945 \leq \hat{\rho} < 0.955$  を意味している。4 節に示した図 1 ~ 図 6 はこの同時分布の断面図である。

10) この実験では  $\sigma^2 = 1$  という仮定をおいている。このような仮定をおいても一般性を失わない。

Sims and Uhlig [20] では、 $T = 100$ の場合のみの実験を行っているが、ここでは、 $T = 50, 100, 250, 500$ の場合の実験を行った。実験に用いたソフトは S-plus ver. 4 であり、グラフ作成のために MS-Excel 97 を用いた。

まず Lindley のパラドックスが、単位根検定の場合にも起きているかどうかを調べてみる。Dickey = Fuller 流の単位根検定における有意水準  $\alpha$  のときの臨界値を求め、対応する事後確率  $p_0$  を計算する。(2) 式のような事前分布で、 $g(\theta)$  として、0.8 から 0.99 まで 0.01 刻みの離散型の一様分布を考え、 $\pi_0 = 0.5$  とし、事後確率  $p_0$  を計算したものが表 2 である。ここでは Fuller [4] p. 641 の表から臨界値に対応する  $\hat{\rho}$  の値を求め、最も近い  $\hat{\rho}$  について  $H_0$  が採択される事後確率  $p_0$  を求めた。

表 2 単位根検定における事後確率  $p_0$   
(事前分布  $UD [0.80, 0.99], \pi_0 = 0.5$ )

$\alpha$	$T$			
	50	100	250	500
0.05	0.118	0.121	0.333	0.475
0.1	0.174	0.239	0.483	0.848

この事後確率は、

1.  $p(\hat{\rho} | \rho)$  の分布が離散化されている。
2. もとの分布表が小数点以下第 1 位までである。
3. 臨界値として計算した  $\hat{\rho}$  に最も近い 0.01 刻みの点について計算している。

などの理由により、精度はかなり低いものとなろう。しかし、 $T$  が大きくなるにつれて  $p_0$  の値が大きくなるという、Lindley のパラドックスが起こっているということは、表から見てとることができよう。

次に、Schotman and van Dijk [16] の提唱した事前分布について検証するために、 $\rho = 0.9$  から  $\rho = 1$  までの系列について、事後オッズ比を計算してみる。 $T = 50, 100, 250, 500$  の標本数について推定値  $\hat{\rho}$  と、その標準誤差  $s_{\hat{\rho}}$

を求め、一様分布の下限を0.8とした場合と $a^*$ とした場合のそれぞれの事後オッズ比を計算した。ともに $\pi_0 = 0.5$ とした。次の表は $\frac{p_0}{p_1} > 1$ となった系列の数である。

表3 一様な事前分布の下限についての比較

$\rho$		$T$			
		50	100	250	500
0.9	下限0.8	8	4	0	0
	下限 $a^*$	13	0	0	0
0.91	下限0.8	14	5	0	0
	下限 $a^*$	17	1	0	0
0.92	下限0.8	20	13	0	0
	下限 $a^*$	28	9	0	0
0.93	下限0.8	34	18	0	0
	下限 $a^*$	42	4	0	0
0.94	下限0.8	39	22	0	0
	下限 $a^*$	40	10	0	0
0.95	下限0.8	42	32	2	0
	下限 $a^*$	44	16	0	0
0.96	下限0.8	47	42	16	0
	下限 $a^*$	51	26	0	0
0.97	下限0.8	56	49	25	6
	下限 $a^*$	58	29	9	4
0.98	下限0.8	60	57	53	28
	下限 $a^*$	64	43	33	4
0.99	下限0.8	71	77	78	67
	下限 $a^*$	72	56	53	15
1	下限0.8	71	76	96	93
	下限 $a^*$	73	75	81	72

この結果から標本数  $T$  が小さい場合には, Schotman and van Dijk [16] の事前分布のほうが帰無仮説を採択しやすくなっており,  $T$  が大きくなるにつれて帰無仮説を棄却しやすくなっていることがわかる。

次に Lindley のパラドックスとの関連を見るために  $\hat{\rho}$  の値によって表にまとめてみる。

表 4 採択系列数の比較 ( $T=50$ )

$\hat{\rho}$	総数	下限0.8	下限 $a^*$
-0.9	381	0	0
0.91	66	0	0
0.92	54	0	0
0.93	69	0	5
0.94	68	0	35
0.95	74	74	74
0.96	77	77	77
0.97	72	72	72
0.98	68	68	68
0.99	56	56	56
1	47	47	47
1.01	43	43	43
1.02	13	13	13
1.03	7	7	7
1.04	4	4	4
1.05	1	1	1

表 5 採択系列数の比較 ( $T=100$ )

$\hat{\rho}$	総数	下限0.8	下限 $a^*$
-0.9	381	0	0
0.91	66	0	0
0.92	54	0	0
0.93	69	0	0
0.94	68	0	0
0.95	74	0	0
0.96	77	104	2
0.97	72	89	58
0.98	68	70	70
0.99	56	68	68
1	47	46	46
1.01	43	21	21
1.02	13	2	2
1.03	7	2	2
1.04	4	0	0
1.05	1	0	0

表 6 採択系列数の比較 ( $T=250$ )

$\hat{\rho}$	総数	下限0.8	下限 $a^*$
-0.96	720	0	0
0.97	110	0	0
0.98	93	93	0
0.99	106	106	105
1	67	67	67
1.01	4	4	4

表 7 採択系列数の比較 ( $T=500$ )

$\hat{\rho}$	総数	下限0.8	下限 $a^*$
-0.96	712	0	0
0.97	100	0	0
0.98	94	0	0
0.99	113	113	14
1	81	81	81
1.01	0	0	0

たとえば、 $T = 500$ の時の有意水準0.1の臨界値に対応する $\hat{\rho}$ の値は0.99であるが、表7が示すように、Schotman and van Dijk [16]の事前分布のほうが無仮説を棄却しやすくなっている。この事前分布はLindleyのパラドックスを避けることができているといえよう。

しかし、この事前分布は、「同一の尤度から導かれる統計的結論は同じでなくてはならない」という尤度原理を満たしていない<sup>11)</sup>。それゆえ、ベイジアンアプローチにおける事前分布としては、問題を含んだものといえよう。

次に、一様な事前分布の上限について考える。Sims [18]やSchotman and van Dijk [16]が用いた対立仮説のもとでの事前分布は、ともに $\rho < 1$ の範囲である。これは、与えられた系列が先験的に、定常である( $\rho < 1$ )か、階差定常である( $\rho = 1$ )かのいずれかであることがわかっているというものである。もし、このような検定を非定常な系列( $\rho > 1$ )であるか、定常または階差定常な系列( $\rho \leq 1$ )であるか先験的にわからない系列に対してこの検定を用いた場合には、誤った結論を導きかねないであろう。実際に、特に標本数 $T$ が50や100の場合には、 $\rho > 1$ を仮定しているのに、 $\hat{\rho} < 1$ となる系列が少なからずあり、 $T = 50$ の場合では、 $\rho = 1.01$ とした場合に、 $\hat{\rho} < 1$ となる系列の割合は50.5%、 $\rho = 1.02$ とした場合で39.3%となる。よって、このような事前分布が有効となるのは、あらかじめ、 $\rho > 1$ であるか $\rho \leq 1$ であるかを検証した後のみといえよう。

## 7 おわりに

本稿では、単位根検定を事後オッズ比によっておこなうベイジアンアプローチについて、Sims [18]やSims and Uhlig [18]で提唱された一様な事前分布を用いる方法について考察してきた。

この場合、Lindleyのパラドックスは起きるが、これは伝統的アプローチとベイジアンアプローチの考え方の相違に基づくものであり、これを避けて

11) Koop and Steel [9] p. 97.

伝統的アプローチと同様の結果を得る事前分布を考案するよりも、ベイジアンの方において整合的な事前分布を導くことのほうが重要であるといえよう。

本稿では、無知をあらわす事前分布として、単位根問題にどのようなものが最適であるかという問題には触れなかった。この問題については、一様分布を考えた Sims [18] および Sims and Uhlig [20]、それを時系列の成り立ちを考慮に入れていないとして批判した Phillips [15] の Jeffreys 型的事前分布以外に、Berger and Yang [2] や Lubrano [12] など、いくつかの事前分布が考えられているが、結論は出されていない。この問題は今後の課題としたい。

また、本稿では触れなかった、Lubrano [12] で指摘されている、時系列の初期値  $y_0$  に関する問題、定数項を含んだ場合の事前分布の問題などについても今後の課題としていきたい。

## 参 考 文 献

- [1] Berger, J. O. and M. Delampady (1987), "Testing precise hypotheses," *Statistical Science*, **2**, 317-352.
- [2] Berger, J. O. and R. Y. Yang (1994), "Noninformative priors and the AR(1) model," *Econometric Theory*, **10**, 461-482.
- [3] Dickey, D. A. and W. A. Fuller (1979), "Distribution of estimators for autoregressive time series with a unit root," *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.
- [4] Fuller, W. A. (1996), *Introduction to Statistical Time Series*, 2nd edition, John Wiley & Sons.
- [5] Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [6] Jeffreys, H. (1961), *Theory of Probability*, 3rd edition, Oxford University Press.
- [7] 河田 正樹 (1996) 「単位根問題におけるベイジアンアプローチ」『早稲田経済学研究』**44**, 135-143.
- [8] Koop, G. (1991), "Intertemporal properties of real output: a Bayesian analysis," *Journal of Business & Economic Statistics*, **9**, 253-265.
- [9] Koop, G. and M. F. J. Steel (1994), "A decision-theoretic analysis of unit-root hypothesis using mixtures of elliptical models," *Journal of*

*Business & Economic Statistics*, 12, 95-107.

- [10] Lee, P. M. (1997), *Bayesian Statistics: An Introduction*, 2nd edition, Arnold.
- [11] Lindley, D. V. (1957), "A statistical paradox," *Biometrika*, 44, 187-192.
- [12] Lubrano, M. (1995), "Testing for unit roots in a Bayesian framework," *Journal of Econometrics*, 69, 81-109.
- [13] Maddala, G. S. and I. M. Kim (1998), *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.
- [14] Nelson, C. R. and C. I. Plosser (1982), "Trends and random walks in macroeconomic time series," *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- [15] Phillips, P. C. B. (1991), "To criticize the critics: an objective Bayesian analysis of stochastic trends," *Journal of Applied Econometrics*, 6, 333-364.
- [16] Schotman, P. C. and H. K. van Dijk (1991), "A unit root in real exchange rates," *Journal of Econometrics*, 49, 195-238.
- [17] Schotman, P. C. and H. K. van Dijk (1991), "On Bayesian routes to unit roots," *Journal of Applied Econometrics*, 6, 387-401.
- [18] Sims, C. A. (1988), "Bayesian skepticism on unit root econometrics," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 463-474.
- [19] Sims, C. A. (1991), "Comment by Christopher A. Sims on 'To criticize the critics', by Peter C. B. Phillips," *Journal of Applied Econometrics*, 6, 423-434.
- [20] Sims, C. A. and H. Uhlig (1991), "Understanding unit rooter: a helicopter tour," *Econometrica*, 59, 1591-1599.
- [21] 和合 肇 (1998) 「ベイズ計量経済分析における最近の発展」『日本統計学会誌』 28, 253-305.
- [22] 山本 拓 (1988) 『経済の時系列分析』創文社.
- [23] Zellner, A. (1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley & Sons. (福場 庸・大澤 豊 共訳『ベイズ計量経済学入門』培風館, 1986)