

状態空間モデルにおける単位根検定

—— ベイジアン視点から ——

河 田 正 樹

1 はじめに

時系列モデル分析において、平均非定常な系列が、階差をとれば定常系列になる階差定常であるかどうかを検定する手法が単位根検定である。系列が定常な場合、パラメータの漸近分布は正規分布となる。しかし、単位根を含む場合には漸近分布が特殊な分布に従う。そのため、単位根検定を最初に提唱した Dickey = Fuller 流の単位根検定¹⁾では、単位根を含むという帰無仮説が棄却されにくい、すなわち検出力が低くなるという問題点を含んでいる。

この問題について Sims [10] は、ベイジアンアプローチではこのような問題がおこらないと主張した。また Sims and Uhlig [12] においてシミュレーション実験をおこない、一様な事前分布を設定した場合のパラメータの事後分布は、単位根を含む場合にも定常の場合と同様に左右対称の分布となることを示した。Sims は伝統的アプローチ²⁾による単位根検定を、不毛な考え (sterile ideas) として痛烈に批判した³⁾ため、単位根問題におけるベイジアンアプローチについての論争がおこった。論争の中心は事前分布の設定にあり、単位根問題におけるベイジアンアプローチでは事前分布の設定の仕方によって、結果が大きく異なることが知られている⁴⁾。

注1) Fuller [2] や Dickey and Fuller [1] などで考えられた方法を総称して Dickey = Fuller 流の単位根検定という。

2) 本稿ではノンベイズのアプローチを伝統的アプローチとよぶ。

3) Sims [10] p. 463.

4) 河田 [4][5] では、この問題のサーベイといくつかの実験をおこなった。

一方、伝統的アプローチによる単位根検定においても、Dickey = Fuller 流の単位根検定の検出力の低さへの対処がなされている。そのような観点から、帰無仮説を定常モデルとする検定が考えられ、その1つに Kwiatkowski et al. [6] の検定⁵⁾がある。KPSS 検定は、1種の状態空間モデルを仮定し、状態方程式の誤差項についてラグランジュ乗数 (LM) 検定をおこなったものである。

本稿では、KPSS 検定で考えた状態空間モデルにベイジアンアプローチを試みた Koop and van Dijk [7] の手法について、伝統的アプローチである KPSS 検定や Dickey = Fuller 流の検定との関係やそれぞれの検定の特徴などについて考察を進めていく。

次節以降は以下のような内容となっている。2節では状態空間モデルにおける単位根について KPSS 検定を中心に概説し、MA モデルの単位根との関連を説明する。3節では Koop and van Dijk [7] の用いたベイジアンアプローチについて概説する。4節ではシミュレーション実験をおこない、ベイズファクターによる検定、KPSS 検定、Dickey = Fuller 流の検定について、検定どうしの関係や個々の検定の特徴について考察をおこない、5節で総括する。

2 状態空間モデルにおける単位根

Kwiatkowski et al. [6] では、原系列 y_t を線形トレンド、ランダムウォーク、定常な誤差項の3つに分解することを仮定している。すなわち、

$$y_t = \xi t + \tau_t + e_t \quad (1)$$

となり、ここで、 τ_t は

5) 以下この検定のことを KPSS 検定ということにする。

$$\tau_t = \tau_{t-1} + u_t \quad (2)$$

を満たすランダムウォークであり、 $u_t \sim (0, \sigma_u^2)$, *i.i.d.* である。

このモデルにおいて、 u_t の分散 σ_u^2 に着目し、 $H_0: \sigma_u^2 = 0$ vs. $H_1: \sigma_u^2 \neq 0$ という検定を行なうのが、KPSS 検定である。帰無仮説のもとで、 τ_t は時点 t に依存せず一定となるので、 y_t は線形トレンドまわりの定常な系列となる。一方、対立仮説のもとでは、 τ_t はランダムウォークとなり、 y_t は単位根を含む系列であるとみなされる。

このモデルは状態空間モデルの1種とみることができる。状態空間モデルとは、時系列 Y_t を、状態変数 X_t の線形関数にノイズを加えた観測方程式と、 X_t の前時点の状態からの推移にノイズを加えた状態方程式の2つの方程式によって表現するモデルであり、ARIMA モデルを含むさまざまな時系列を表現できる。

一般的には

$$Y_t = G_t X_t + W_t \quad (3)$$

$$X_{t+1} = F_t X_t + V_t \quad (4)$$

とあらわされ、(3) 式が観測方程式、(4) 式が状態方程式である。

Kwiatkowski et al. [6] のモデルにおいて、(1) 式を観測方程式、(2) 式を状態方程式とみれば状態空間モデルである。

KPSS 検定では Nabeya and Tanaka [9] で考えられた統計量が用いられる。 y_t を定数項と線形トレンドに対して回帰した残差を $\hat{\varepsilon}_t$ とする⁶⁾。残差の部分積和を

$$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (5)$$

と定義し、 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ を誤差項の分散の推定値とすると、LM 統計量は

6) (1) 式で $\xi = 0$ のとき、 $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \bar{y}$ となる。

$e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$, *i.i.d.* という仮定のもとで,

$$LM = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{\hat{\sigma}_e^2} \quad (6)$$

となる。

しかし、(6) 式の $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$, *i.i.d.* という仮定は強すぎて、非現実的である。そのため、Kwiatkowski et al. [6] は *i.i.d.* が成り立たない場合の誤差項分散の推定値として、

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T e_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s} \quad (7)$$

を考えた。ここで、 $w(s, l) = 1 - s/(l+1)$ であり、誤差項の異時点間の積にウエイトを与えている。 l はラグを何期まで考えるかについてのパラメータである。

また検定統計量は分子も基準化し、

$$\hat{\eta} = \frac{T^{-2} \sum S_t^2}{s^2(l)} \quad (8)$$

というものが用いられている。Kwiatkowski et al. [6] ではこの統計量の臨界値をシミュレーションによって求めた。

ところで、状態空間モデルにおける単位根問題は、MA モデルの単位根問題と密接な関係がある。

$$y_t = dt + v_t \quad (9)$$

$$\Delta v_t = (1 - \theta L)\epsilon_t \quad (10)$$

という MA(1) モデルを考える。

ここで、 $v_0 = \epsilon_0$ とおき、 Δv_t を変形し累積すると、

$$v_t = (1 - \theta) \sum_{s=0}^t \epsilon_s + \theta \epsilon_t \quad (11)$$

となる。

一方、(2)式で、 $u_t = (1-\theta)\epsilon_t$ とおくと、

$$\tau_t = \tau_0 + (1-\theta) \sum_{s=1}^t \epsilon_s \quad (12)$$

となるので、初期値を適当に選ぶことによって(1)、(2)式は(9)、(10)式のMA(1)モデルと等しくなる。

(11)式で $|\theta| < 1$ のとき、 $(1-\theta) \sum_{s=0}^t \epsilon_s$ はI(1)⁷⁾、 $\theta\epsilon_t$ はI(0)なので、 y_t はI(1)となる。一方 $\theta = 1$ のときは $v_t = \epsilon_t$ となるので y_t はI(0)となる。すなわちMAモデルにおける単位根検定からは、定常モデルを帰無仮説とした仮説検定が自然と導かれる。

3 ベイジアンアプローチ

Koop and van Dijk [7]において最初に考えたのは、線形トレンドのない次のようなモデルである。

$$y_t = \tau_t + e_t \quad (13)$$

$$\tau_t = \tau_{t-1} + u_t \quad (14)$$

ここで誤差項には $e_t \sim N(0, \sigma_e^2), i.i.d., u_t \sim N(0, \sigma_u^2), i.i.d$ という強い仮定を置いている。

系列が単位根を含むかどうかの検定は、 $H_0: \sigma_u^2 = 0$ vs. $H_1: \sigma_u^2 \neq 0$ ということであるが、この検定は

$$\theta = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_e^2} \quad (15)$$

とした場合、 $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta \neq 0$ という検定をおこなうことと同値で

7) I(d)はその系列のd回差分をとったものが定常系列となることをあらわす。

ある。このような変換をほどこすことによって、 $0 \leq \sigma_u^2 < \infty$ のパラメータ区間が、 $0 \leq \theta < 1$ という有限の区間に変換される。

$H_0: \theta = 0$ の検定は、単純仮説 vs. 複合仮説の検定なので、事前分布を

$$p(\theta) = \begin{cases} \pi_0 & (\theta = 0 \text{ のとき}) \\ (1 - \pi_0)g(\theta) & (\theta \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (16)$$

とおく。

ここで、対立仮説のもとの事前分布について考えてみる。 θ と σ_e^2 に、無知をあらわす事前分布を設定するならば、Jeffreys の基準⁸⁾により、 θ に関しては一様分布、 σ_e^2 に関してはその対数が一様分布となる分布を設定することができる。しかし、これらの分布は積分が1とならない improper な事前分布である。そこで、proper な事前分布として σ_e^2 の逆数 h_e についてガンマ分布を考える⁹⁾。

$$g(\theta, h_e) \sim f_G(s_e^{-2}, \nu_e) \quad (17)$$

ここで、 s_e^{-2} はガンマ分布の平均を、 ν_e は自由度を表している¹⁰⁾。これは自然共役事前分布であるが、 ν_e としてごく小さな値¹¹⁾をとると、無知を表す事前分布に近くなる。

一方、尤度関数について考える。(13)(14) 式をベクトルで表現すると、

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\mathbf{u} \quad (18)$$

となる。ただし、

8) Jeffreys [3] p. 117 で、「ごくふつうの場合であればおおむね成立する」とした基準である。なお、訳語は Zellner [15] 邦訳47ページによる。

9) θ には一様分布を設定している。

10) ガンマ分布のこのような表現は Poirier [11] p. 100 などに見ることができる。

11) Koop and van Dijk [7] では 10^{-300} を考えた。

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)', \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_T)', \mathbf{e} = (e_1, \dots, e_T)', \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)'$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって、

$$\mathbf{y} \sim N(0, \sigma_e^2 \mathbf{V})$$

となる。ただし、 $\mathbf{V} = \mathbf{I}_T + \frac{\theta}{1-\theta} \mathbf{C}\mathbf{C}'$ である。

事前分布と尤度をかけあわせ、局外母数である h_e を積分することによって、 θ の事後分布は

$$p(\theta | \text{Data}) \propto |\mathbf{V}|^{-1/2} (\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} + \nu_e s_e^2)^{-(T+\nu_e)/2} \quad (19)$$

となる。

ν_e としてごく小さい値をとり、 $s_e^2 = 1$ とすると、この項は無視してもよく、事前分布において $\pi_0 = 0.5$ としたときの事後オッズ比は

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{(\mathbf{y}'\mathbf{y})^{-T/2}}{|\mathbf{V}|^{-1/2} (\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y})^{-T/2}} \quad (20)$$

となる。これはベイズファクター

$$B = \frac{p_0/p_1}{\pi_0/\pi_1} \quad (21)$$

に等しくなる。

4 シミュレーションによる検証

Koop and van Dijk [7] の考えたベイジアンアプローチを検証するために、本稿ではシミュレーション実験をおこなってみた。

(13)(14) 式において e_t と u_t について正規乱数を発生し、 $\tau_0 = 0$ として、 $T = 100$ 個の y_t の系列を作った。ここで、 e_t の分散 σ_e^2 は 1 とし、 u_t の分散 σ_u^2 は与えた θ から $\sigma_u^2 = \frac{\theta}{1-\theta}$ として導出した。

まず系列 y_t を、データ発生プロセス (DGP) の θ の値を変えて 3 つ発生し、それぞれの系列の周辺事後分布の形状を調べてみる。

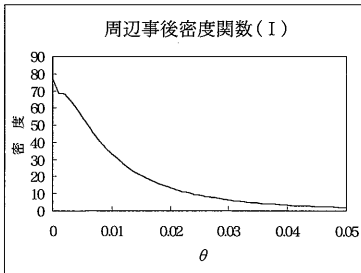


図 1: $\theta = 0$ の時の周辺事後分布

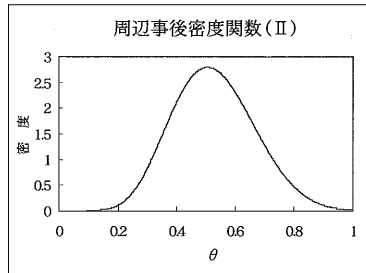


図 2: $\theta = 0.5$ の時の周辺事後分布

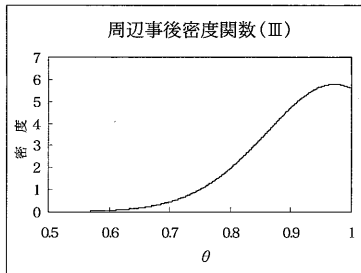


図 3: $\theta = 1$ の時の周辺事後分布

図 1 は $\theta = 0$ のときの周辺事後分布であり、0 のごく近くの範囲の密度が

非常に高くなり、他の部分の密度は非常に低い。このデータでは $B = 83.56$ となり、帰無仮説が採択される。

図2は $\theta = 0.5$ すなわち $\sigma_u^2 = \sigma_\varepsilon^2$ のときの周辺事後分布である。0.5の近くを山とするほぼ左右対称の形状をしている。またこのデータでは $B = 4.2 \times 10^{-27}$ となり、対立仮説が採択される。

図3は $\theta = 1$ すなわち $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ のときの周辺事後分布である。ここで $\sigma_u^2 = 1$ とした。この場合、1の近くにかかなり大きな山ができる。またこのデータでは $B = 2.4 \times 10^{-111}$ となり、対立仮説が採択される。

次に、DGPの θ を0から0.1まで0.01刻みで変化させ、個々の θ について $T = 100$ の系列を1,000個つくり、そのうち $B > 1$ となる系列がいくつあるかを数えてみた。

表1: H_0 を採択する系列の数 (1000系列中)

θ	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
系列数	999	332	168	125	62	43	31	23	19	11	12

θ が少し変化しただけで、採択される系列が急激に減っていくことがわかる。この結果からは Dickey = Fuller 流の検定でおこる、帰無仮説が棄却されにくいという問題は、ある程度回避できているということが想像できる。さらに KPSS 検定や Dickey = Fuller 流の検定などの、伝統的アプローチをおこなった場合との結果の比較を試みる。

まず、DGPの $\theta = 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.99$ について、それぞれ $T = 100$ の系列を100個つくり、個々の系列にバイズファクターによる検定、KPSS 検定、Dickey = Fuller 流の検定をおこなった。ここで、

1. $B > 1$ なら $I(0)$
2. $\hat{\eta} < 0.463$ なら $I(0)$
3. $\hat{\rho} > 0.921$ なら $I(1)$

とした。KPSS 検定は Kwiatkowski et al. [6] p.166 から、Dickey =

Fuller 流の検定は Fuller [2] p.641 からそれぞれ有意水準 5% の片側検定の臨界値を用いた。

表 2 において、左側は Dickey = Fuller 流の検定で $I(0)$ とみなされたものであり、右側は $I(1)$ とみなされたものである。それぞれについて、ベイズファクターによる検定と KPSS 検定の結果をクロス集計している。

表 2: 検定どうしの関係 (1)

	I(0) (DF 検定)					I(1) (DF 検定)				
			B					B		
			I(0)	I(1)	計			I(0)	I(1)	計
$\theta = 0$	$\hat{\eta}$	I(0)	97	0	97	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	2	1	3		I(1)	0	0	0
		計	99	1	100		計	0	0	0
				B					B	
$\theta = 0.01$	$\hat{\eta}$	I(0)	22	19	41	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	9	50	59		I(1)	0	0	0
		計	31	69	100		計	0	0	0
				B					B	
$\theta = 0.05$	$\hat{\eta}$	I(0)	5	7	12	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	1	84	85		I(1)	0	3	3
		計	6	91	97		計	0	3	3
				B					B	
$\theta = 0.1$	$\hat{\eta}$	I(0)	1	0	1	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	0	85	85		I(1)	0	14	14
		計	1	85	86		計	0	14	14
				B					B	
$\theta = 0.5$	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	0	24	24		I(1)	0	76	76
		計	0	24	24		計	0	76	76
				B					B	
$\theta = 0.99$	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0	$\hat{\eta}$	I(0)	0	0	0
		I(1)	0	5	5		I(1)	0	95	95
		計	0	5	5		計	0	95	95
				B					B	

この結果から、まず Dickey = Fuller 流の検定について、データに新たな

ノイズが加わった場合には、結果の信頼性が低いということがいえよう。 $\theta = 0.5$ のとき、 $\sigma_e^2 = \sigma_u^2$ であるので、 y_t はランダムウォークに、その誤差項と等分散のホワイトノイズを加えたものとみなせる。よって、その程度のノイズで検定のサイズが変わってしまうことが確認できる。

単位根を含むモデルを2つの検定では、ベイズファクターを用いたもののほうが検出力が高いことがわかる。これは、伝統的アプローチでは帰無仮説を否定する強い証拠がないと対立仮説が採択されないのに対して、ベイズアンアプローチでは、帰無仮説と対立仮説を同等に扱うということにもよる。しかし、ベイズファクターでは棄却されるのに、伝統的アプローチで棄却されない系列もある。そこで、 $\theta = 0.01$ の4系列について、 y_t の折れ線グラフとそれぞれの系列の周辺事後分布を次に示す。

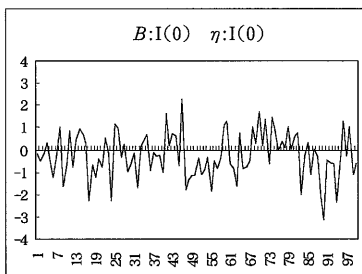


図4: $B > 1, \eta < 0.463$ の系列

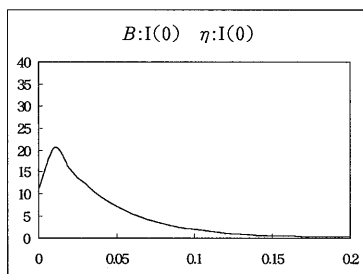


図5: $B > 1, \eta < 0.463$ の系列の周辺事後分布

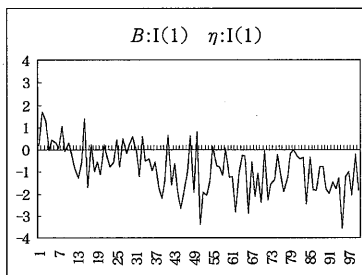


図6: $B \leq 1, \eta \geq 0.463$ の系列

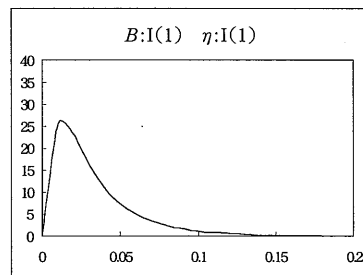


図7: $B \leq 1, \eta \geq 0.463$ の系列の周辺事後分布

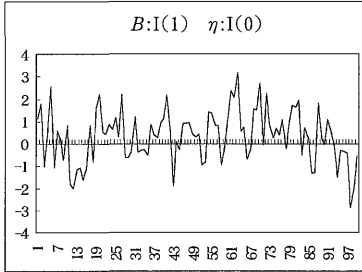


図8: $B \leq 1, \eta < 0.463$ の系列

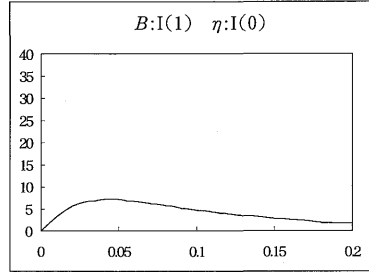


図9: $B \leq 1, \eta < 0.463$ の系列の周辺事後分布

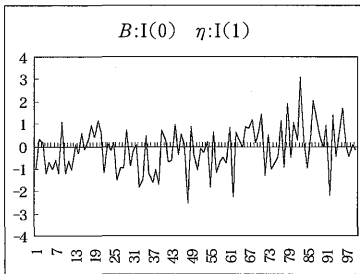


図10: $B > 1, \eta \geq 0.463$ の系列

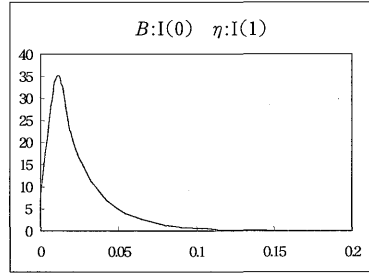


図11: $B > 1, \eta \geq 0.463$ の系列の周辺事後分布

この4つの系列をみると、 y_t のグラフからは図6が非定常であることは明らかに分かる。しかし、他の系列については y_t のグラフからは定常か非定常かの判断はできない。

周辺事後分布をみると、ベイズファクターによってI(0)となる系列は $\theta = 0$ に高い密度を持つ。一方、KPSS検定では0の周辺の密度が高くなる場合にはI(1)となる。図9と図11が対照的であり、図9は $\theta = 0$ およびその近くの密度が低いのに対し、図11は $\theta = 0$ およびその近くで密度が高くなる。前者はベイズファクターでI(1)、KPSS検定でI(0)となるのに対し、後者はベイズファクターでI(0)、KPSS検定でI(1)となる。

次にDGPとして $y_t = \rho y_{t-1} + e_t$ というAR(1)モデルを考える。そこで $\rho = 1, 0.85, 0.5$ について $T = 100$ の系列を100個つくり、3種類の検定をおこなった。

このモデルは、(13)(14)式のモデルに一致するものではないが、モデルを誤って定式化した場合として考察してみる。

表3：検定どうしの関係（1）

		I (0) (DF 検定)			I (1) (DF 検定)				
		B			B				
		I (0)	I (1)	計					
		I (0)	I (1)	計	I (0)	I (1)	計		
$\rho = 1$	$\hat{\eta}$	I (0)	0	0	0	I (0)	0	0	0
		I (1)	0	2	2	I (1)	0	98	98
		計	0	2	2	計	0	98	98
$\rho = 0.85$	$\hat{\eta}$	I (0)	0	15	15	I (0)	0	0	0
		I (1)	0	83	83	I (1)	0	2	2
		計	0	98	98	計	0	2	2
$\rho = 0.5$	$\hat{\eta}$	I (0)	18	43	61	I (0)	0	0	0
		I (1)	5	34	39	I (1)	0	0	0
		計	23	77	100	計	0	0	0

この結果をみると、 $\rho = 1$ のときには、ベイズファクターによる検定と KPSS 検定は、ともにすべての系列を I (1) と結論づけており、Dickey = Fuller 流の検定より正確な結論を導いている。

一方、 $\rho = 0.85, 0.5$ の定常な AR (1) モデルの場合は、ベイズファクターによる検定と KPSS 検定はともに、誤って I (1) という結論を出すことが多い。特にベイズファクターではかなりの問題点がある。ベイズファクターによる検定では、モデルの定式化を誤った場合には、誤った結論を導く可能性がかなり高いということが示唆されよう。

5 おわりに

本稿では、Kwiatkowski et al. [6] の帰無仮説を I (0) とする仮説検定と、それをベイジアンアプローチでおこなった Koop and van Dijk [7] につい

て考察をおこなってきた。

Koop and van Dijk [7] のベイジアンアプローチでは、状態空間モデルにおける単位根検定をおこなった場合に、その検出力が高くなることがシミュレーション実験によって示された。

単位根検定は、その大部分が帰無仮説を $I(1)$ としたものであるが、帰無仮説を $I(0)$ とした検定は、系列が単位根を含むかどうかの問題について確証を与えてくれる¹²⁾ものである。帰無仮説を $I(0)$ とした検定が、ベイジアンアプローチによってほとんど考えられてこなかったことは、片手落ちの状態である。帰無仮説を $I(0)$ とした検定について考察をすることによって、帰無仮説を $I(1)$ とした単位根検定の問題点を考察できるのではないかと考えられる。

本稿で考察したものはごく限定的なものである。Koop and van Dijk [7] では、(13)(14) 式のモデルのほかに、AR 項をいれたモデルを考察している。前節で考察したように、(13)(14) のモデルは定常な AR(1) モデルについて検定をおこなうと誤った結論を導く可能性が高い。しかし AR 項を入れたモデルを考えれば、定常な AR(1) モデルにも有効であり、包括的な検定をおこなうことができよう。また、(13)(14) 式のモデルにおける誤差項の仮定の問題、事前分布の設定に関する問題など検討すべき点は数多く残っている。これらは今後の課題としたい。

参 考 文 献

- [1] Dickey, D. A. and W. A. Fuller, (1979), "Distribution of estimators for autoregressive time series with a unit root," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- [2] Fuller, W. A., (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons.
- [3] Jeffreys, H., (1961), *Theory of Probability*, 3rd edition, Oxford University Press.
- [4] 河田 正樹 (1996) 「単位根問題におけるベイジアンアプローチ」『早稲田経済学

12) Maddala and Kim [8] p. 126.

- 研究』44, 135-143.
- [5] 河田 正樹 (1999) 「ベイジアンアプローチによる単位根検定」『徳山大学論叢』52, 1-18.
- [6] Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin, (1992), "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root," *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- [7] Koop, G. and H. K. van Dijk, (2000), "Testing for integration using evolving trend and seasonal models : A Bayesian approach," *Journal of Econometrics*, 97, 261-291.
- [8] Maddala, G. S. and I. M. Kim (1998) *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.
- [9] Nabeya, S. and K. Tanaka, (1988), "Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative," *The Annals of Statistics*, 16, 218-235.
- [10] Sims, C. A., (1988), "Bayesian skepticism on unit root econometrics," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 463-474.
- [11] Poirier, D. J., (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics*, The MIT Press.
- [12] Sims, C. A. and H. Uhlig, (1991), "Understanding unit rooter : a helicopter tour," *Econometrica*, 59, 1591-1599.
- [13] Stock, J. H., (1994), "Unit roots, structural breaks and trends," in Engle, R. F. and D. L. McFadden, (eds.) *Handbook of Econometrics*, vol. 4, North-Holland, 2739-2841.
- [14] Tanaka, K., (1996), *Time Series Analysis*, John Wiley & Sons.
- [15] Zellner, A., (1971), *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley & Sons. (福場 庸・大澤 豊 共訳『ベイジアン計量経済学入門』培風館, 1986)