ベキ分布を与える確率過程

山　岸　憲　治

1　はじめに

最近様々な分野で確率分布がベキ分布[1)]となる例が報告されている。その一つとして1995年ボストン大学の Stanley 達による株式市場のデータの株価の変動についての分析がある[1]。彼らは，コンピュータに蓄積されたS & P 500 のインデックスの変化について調べた。その結果は，驚くべきことであった。株価変動の分布は，以前に信じられまたデリバティブの価格計算の暗黙の前提となっていた正規分布ではなくベキ分布であった。正規分布の場合には，平均から標準偏差の 3 倍以上離れた大きな変動はほとんど起こらないことを意味している。一方ベキ分布では，分散が発散していて大きな変動が頻繁に起こりうる。

例えば金融派生商品は，そもそも保険をかけるためのものである。その一つであるオプションの価格は，Black と Scholes の方程式を用いて求める[2]。もとになる方程式を構成する前提には伊藤のレンマがあり，それは価格変動の分布を正規分布としている。現実がベキ分布であれば，正規分布で予測した価格は現実離れしたものとなり保険のはずがリスクの大きなギャンブルとなってしまう。現実とそぐわなければいつか破綻する。デリバティブを扱う米国 LTCM 社の数年前の倒産はその例であろう。

一つの網にかかる漁獲量もベキ分布を与える一つの例である[3]。魚は群れをなして泳ぎまわっている。その大きさが大きい群れほど，ある海域で泳ぎ回る群れの数が少ないことは想像がつく。その大きさの平均値からのずれ

注 1）冪分布。以下ではカタカナ表示する。

はやはり正規分布程度のものであると考えるのが常識であろう。しかし長年にわたって蓄積されたデータは，魚の種類は限られているがベキ分布を示している。

日本の会社の所得の分布もベキ分布である[4]。100億円以下の所得層の会社は，その所得を横軸にとるとベキ分布にしたがった構造をもっている。また会社の成長率についてもベキ分布であることが指摘されている[5]。

そのほかに雲の中の雨滴の大きさの分布など理科学的な多くの分野にこのベキ分布が見られることが知られている[6]。

ところで先のStanley等の論文は自然科学の論文を掲載するNatureに載ったものである。またStanley自身統計物理学の専門家でありその物理学的解析手法を株価の変動データに用いてこの新たな発見に導かれた。

経済学は，数理的学問であるがその方法論は物理学のそれとは異なる。経済学は，簡単には実験できない分野であることがそのおもな理由である。また現象が複雑すぎて原因と結果を一意に結び付けることが困難ということもあろう。しかし，我々の社会もまた自然の中の営みであり何らかの法則に支配されていると考えるのはそれほど間違っているとは思われない。物理学的な方法論が，経済学で要求される政策的な答えをすぐさま出すことができないにしても，その基本的部分にたいして経済学とは異なった描像を提供することは有益なことに違いない。

Stanley等の仕事は，株式市場の状況を反映するデータを分析しそこからベキ分布という経験則を導きだした。物理では，この段階を現象論的段階と呼び，より本質的な新たな理論の模索に入る準備段階としている。新たな段階に入るためにはモデル化が必要で，株価の場合では，株価の変動がベキ分布になるような市場のモデル化がそれである。例えば株取引の実際を反映するような株取引の理論モデルがそれにあたる。物理の場合には経験則にあうような様々なモデルが提出され，その中であるモデルが生き残るためにはそのモデルに基づく新たな予言とその実験的検証が行われる必要がある。関連した実験のできない株価の変動について新たな予言に結びつくような市場モ

デルがあるかどうか定かではない。しかし同じく実験が難しい宇宙構造についてもデータの蓄積とモデルの検証によって宇宙の描像が徐々にはっきりしてきている。市場モデルについても，それが正しいモデルであれば株価の変動についての基本的知識となり，社会全体に大きなダメージを与える暴騰や暴落を避けるコントロールの方法を暗示し予言できるかもしれない。

数学的側面について述べると，現実に適用する意味で一般性のある確率・統計的数理を用いた学問として確率過程の理論は重要である。統計物理学ばかりでなく遺伝学などこの理論を利用した生物学の分野があり[7]，これらの経験を有効に利用することで社会や環境問題にもデータをふまえた実証的,理論的アプローチが充分役に立つ可能性がある。

このような立場から，この論文ではベキ分布を与える確率過程についての基礎的な事柄についてまとめる。確率過程は，確率方程式あるいは確率微分方程式・ランジュバン方程式で表される[8]。ベキ分布を与えるこれらの方程式は一般に無限個ある。その中からモデル作りの指針となるような簡単な確率過程について調べる。

ランジュバン方程式は，もとになる決定論的方程式に，雑音としてウイナー過程に従う確率変数を加えたものである。多くの確率方程式はこの形式だが，雑音の入り方は一通りではないので，この雑音と区別するために確率変数に比例する形で入る雑音を積雑音[2]とよび従来の雑音を加法的雑音[3]と呼ぶことにする。この論文ではこの積雑音がベキ分布を実現する上で主要な役割をすることを示す。

次の節では，ベキ分布の一般的定義を与え，漸近的にベキ分布となるLevy 分布の一般的性質を説明する。第3節では，Fokker-Planck 方程式でベキ分布を与える簡単な確率過程を求める。第4節では，積雑音と加法的雑音の役割を簡単な過程について調べ積雑音がベキ分布を与える重要な役割をはたすことを示す。第5節では，積雑音の簡単な例で，その時間依存性を調

2）multiplicative noise
3）additive noise

ベリャプノフ指数との関係を議論する。第6節で，積雑音のしたがう統計的性質を調べ，簡単な条件からベキ分布が与えられることをしめす。第7節では，多変数の場合の簡単な例について説明し，この例を使って魚群の大きさの分布がベキ分布になることを説明する。最後の節は，まとめと今後の課題にあてる。

2　ベキ分布

2.1　企業の所得分布

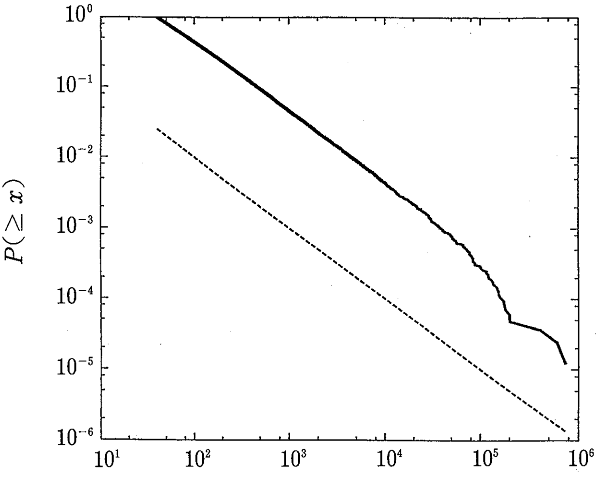

図1　日本の企業の所得分布。両対数グラフ。単位は100万円。点線は$\beta = 1$のジップの法則と呼ばれるグラフ。文献[4]より転載。

図1は，日本の企業の所得分布の両対数グラフである[4]。横軸の単位は百万円。縦軸は，ある金額の所得を定めるとその金額以上の所得のある会社数の割合である。これは所得金額をxとし，その金額の所得のある会社の割合，すなわち確率密度関数を$f(x)$とすると，xより大きな金額について

足しあげた累積確率，

$$P(\geq x) = \int_x^\infty dx f(x) \tag{1}$$

である。言い換えると，任意の会社を選んだときその会社の所得が x 以上である確率である。これは約8万5千社のデータに基づいている。グラフを見ると，ほぼ一直線であるから

$$P(\geq x) \sim x^{-\beta} \tag{2}$$

のベキ分布の形をしていてその指数 β はほぼ1である。これを確率密度関数でみると

$$f(x) \sim x^{-1-\beta} \tag{3}$$

を意味している。

もし厳密に $\beta = 1$ であると，これをよく知られたつぎのようなローレンツ分布と見なすこともできる。パラメター γ を定数として，

$$f(x,\gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2}. \tag{4}$$

この式は，$\gamma << |x|$ たいして式 (3) で $\beta = 1$ のように振舞う。

式 (3) で，無限大までの領域を含む確率密度関数の場合には，もし $\beta \leq 0$ ならばこの関数を規格化できないので $\beta > 0$ でなければならない。またもし $\beta < 2$ ならば分散したがって標準偏差は発散する。今後おもにこのような $0 < \beta < 2$ の範囲で考える。

2.2　Levy 分布

ベキ分布は，$|x|$ の大きい漸近領域に限れば Levy 分布として知られるつぎのような分布で統一的に取り扱うことができる[9]。

Levy 分布はその特性関数が，

$$Z(k)=e^{-\gamma|k|^{\beta}}, \tag{5}$$

で与えられる。ただしγは正である。このフーリエ変換が確率密度関数だから

$$f(x,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int dk e^{-ikx-\gamma|k|^{\beta}}. \tag{6}$$

級数展開をすると

$$f(x,\beta)=\sum_{n=0}\frac{(-ix)^n}{n!}\frac{1}{2\pi}\int dk\, k^n e^{-\gamma|k|^{\beta}}=\sum_{n=0}\frac{(-ix)^n}{n!}a_n, \tag{7}$$

ただし和記号のnは偶数のみ。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\, k^n e^{-\gamma k^{\beta}} \tag{8}$$

$$=\frac{1}{\pi\beta}\gamma^{-\frac{n+1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{n+1}{\beta}\right), \tag{9}$$

ただし，ガンマ関数は，

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}dte^{-t}t^{z-1}, \quad \Re z>0 \tag{10}$$

である。

$\beta=2$の場合

この場合には良く知られた正規分布となりベキ分布にはならない。実際，

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{2^{2m}m!}\sqrt{\pi} \tag{11}$$

を使うと

$$f(x,2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\gamma}\right\} \tag{12}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},\quad 2\gamma=\sigma^2 \tag{13}$$

となる。

$\beta=1$ の場合

この場合には先に示したローレンツ分布となる。

$$a_n=\frac{1}{\pi\gamma^{n+1}}n! \tag{14}$$

を使うと (4) となる。

ベキ分布を与える $\beta>0$ の値は一般に偶数を除く実数となることがつぎに議論する漸近式によりわかる。

2.3　漸近式

特性関数の方を級数展開すると漸近式が得られる。

$$f(x,\beta)=\sum_{n=1}\frac{(-\gamma)^n}{n!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{-ikx}|k|^{n\beta} \tag{15}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}\frac{(-\gamma)^n}{n!}\frac{\Gamma(n\beta+1)}{|x|^{n\beta+1}}\sin\frac{n\beta\pi}{2}. \tag{16}$$

ここで,

$$\beta\neq 0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\quad -1,\ -2,\ -3,\ \cdots. \tag{17}$$

$|x|$ が大きい漸近的領域では $n=1$ の場合のみ残るから,

$$f(x,\beta)\simeq C|x|^{-1-\beta}. \tag{18}$$

ただし定数Cは,

$$C=\frac{\gamma}{\pi}\Gamma(\beta+1)\sin\frac{\beta\pi}{2} \tag{19}$$

である。

2.4 Levy 分布のスケール則

Levy 分布のもつ重要な特徴であるスケール則について説明する[9]。

正規分布やローレンツ分布と同様に，同じβを持つ Levy 分布に従う確率変数の和を新たな変数とするとそれはまた Levy 分布に従う。すなわち形を変えない安定分布（Stable Distribution）である。

実際二つの確率変数x_1, x_2が Levy 分布にしたがうとする。それぞれの Levy 分布の特性関数を，βが同じとして，$Z(k,\gamma_i)i=1$, 2と書くことにする。確率変数の和を

$$x=x_1+x_2 \tag{20}$$

とすると，この確率変数の特性関数は，二つのそれの積なので$Z(k,\ \gamma_1+\gamma_2)$となる。

時刻ゼロからtまでn等分して各時刻での確率変数をx_i, $i=0,1,2,\ \cdots,n$とし各々の分布が$Z(k,\gamma h)$, $h=t/n$であれば，上記の議論を適用して時刻tでの分布は$Z(k,\gamma t)$となる。

$Z(k,\gamma h)$に対応する分布を$f(x,\gamma h)$と書くと，このような分布は時間間隔に関するつぎのようなスケール則をみたす,

$$f(x,\gamma h)=h^{-1/\beta}f(xh^{-1/\beta},\gamma). \tag{21}$$

なぜなら

$$Z(k,\gamma h)=Z(kh^{1/\beta},\gamma) \tag{22}$$

が成り立つので，これのフーリエ変換は

$$
\begin{aligned}
f(x,\gamma h) &= \int dk e^{ikx} Z(k,\gamma h) \\
&= \int dk e^{ikx} Z(kh^{1/\beta},\gamma) \\
&= h^{-1/\beta}\int dk e^{ikxh^{-1/\beta}} Z(k,\gamma) \\
&= h^{-1/\beta} f(xh^{-1/\beta},\gamma)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となるからである。

スケール則（21）の意味は，時間間隔を変えても変数のスケールを

$$
y = xh^{-1/\beta} \tag{24}
$$

と変えてしまうとその分布の形状は変化しない，ということである。

実際

$$
\begin{aligned}
P(\geq x,\gamma h) &= \int_x^\infty dx f(x,\ \gamma h) \\
&= \int_x^\infty dx h^{-1/\beta} f(xh^{-1/\beta},\gamma) \\
&= \int_y^\infty dy f(y,\gamma) \\
&= P(\geq y,\gamma), \quad y = xh^{-1/\beta}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ここで

$$
f(x,\ \gamma h) \sim Ch|x|^{-1-\beta} \tag{26}
$$

と置けば，右辺は，

$$
P(\geq y,\gamma) \sim Cy^{-\beta} \tag{27}
$$

となる。すなわち左辺がベキ分布になれば，右辺も同じ指数のベキ分布にな

る。統計物理学での相転移現象では，このスケール則とベキ分布が現れることとは密接な関係があることがわかっている。

スケール則自身は，正規分布についてよく知られている性質である。平均0，分散σ^2の正規分布を$N(x, \sigma^2)$とすると，

$$N(x, \sigma^2) = \sigma^{-1}N(x/\sigma, 1) \tag{28}$$

が成り立つ。これは，(21) で$h = \sigma^2$, $\beta = 2$と置いたものと対応する。

さてStanley達の株価の分析は，このスケール則が株価の変動についても成り立っていることを示した。時間間隔hを1分，3分，10分，32分，100分，316分，1千分ごとのデータとして取り出したものをプロットすると，上記 (24) の$\beta \sim 1.40$でのスケール変換をすればすべて1分の場合の分布のカーブに乗ることを示した。データはニューヨーク株式市場のS & P 500の6年間のおよそ145万の数値をもとにしている。彼らは，これらのデータについてスケール則が成り立つと同時に標準偏差の6倍程度までベキ分布が成り立っていることを示した。

ところでデータは有限な標準偏差をもつ。しかし2.1節で述べたようにもしベキ分布が上記の結果のように$\beta < 2$であれば標準偏差は発散する。

3　ベキ分布を与えるFokker-Planck方程式

3.1　Fokker-Planck方程式

この節では，ベキ分布を与えるFokker-Planck方程式（以下ではFP方程式と呼ぶ）を調べる。FP方程式は，時刻tでの確率密度関数$P(x, t)$にたいして，

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\mu(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma^2(x)}{\partial x}\right\}P(x,t) \tag{29}$$

である。ただしμ, σ^2は，条件付確率分布$P(x, t|y, t+h)$で定義されている；

$$\mu(x)h = \int dy(y-x)P(x, t|y, t+h), \tag{30}$$

$$\sigma(x)^2 h = \int dy(y-x)^2 P(x, t|y, t+h). \tag{31}$$

ここで微小時間 h の推移確率は，

$$P(xt|y, t+h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(x, t)h}} \exp\left\{\frac{(y-x-h\mu(x, t))^2}{2\sigma^2(x, t)h}\right\} \tag{32}$$

で与えられている。

ランジュバン方程式は，つぎで $h \to 0$ としたものである，

$$y-x = h\mu(x)+h\sigma(x)\eta(t). \tag{33}$$

ただし η は，

$$<\eta(t)> = 0, \qquad <\eta(t)^2> = \frac{1}{h} \tag{34}$$

を満たす正規分布する無相関の雑音である。

ベキ分布に近い分布を与える例として，Rayleigh 過程をみよう。そのランジュバン方程式は[4]，

$$\dot{x} = -\kappa x - \frac{\alpha}{x} + \eta(t), \tag{35}$$

ただし κ, α は定数。右辺第一項目は，力学でいうバネによる力の項で，それにちなんで κ をバネ定数と呼んでおく。

この方程式に対応する FP 方程式は

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa x + \frac{\alpha}{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right\}P(x, t). \tag{36}$$

4）以下では積分に関して伊藤の方法はとらず Stratonovich の方法を採用する。

もし $t\to\infty$ で定常状態になったとすると左辺はゼロ。よって

$$\left\{\kappa x+\frac{\alpha}{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right\}P(x)=0. \tag{37}$$

これから

$$P(x)=N\exp\{-\kappa x^2-2\alpha\log|x|\}=N|x|^{-2\alpha}e^{-\kappa x^2}. \tag{38}$$

この分布は，指数関数を含みベキ分布とは言えない。しかし例えば Stanley 等の分析では株価の変動は，標準偏差の 6 倍以上では指数関数的落ち込みが見られることが指摘されている[1]。標準偏差を σ とすると，κ が十分小さく $\sim 1/(6\sigma)^2$ 程度であれば，この 6σ より小さな x では指数関数はほとんどきかず，ベキ分布の振る舞いをする。またそれより大きな領域では指数関数として振舞う。

ベキ分布を与える一般の確率過程

確率微分方程式

$$\dot{x}=a(x)+\sigma(x)\eta(t), \tag{39}$$

に対応する FP 方程式は，

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(a+\frac{1}{4}\frac{\partial\sigma^2}{\partial x}\right)P+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma^2P}{\partial x^2} \tag{40}$$

で与えられる。

冪分布を与えるような a と σ を定めてみよう。

大きな $|x|$ にたいして

$$P\sim|x|^{-\lambda} \tag{41}$$

とし

$$a = \kappa x^n \quad \sigma = \sigma_0 x^m \quad n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots \tag{42}$$

とする。

$$a + \frac{1}{4}\frac{\partial \sigma^2}{\partial x} = \kappa x^n + \frac{1}{2}\sigma_0^2 m x^{2m-1} \tag{43}$$

となり，定常状態の条件

$$\left(-a - \frac{1}{4}\frac{\partial \sigma^2}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^2}{\partial x}\right) P = 0 \tag{44}$$

は,

$$\lambda = m - \frac{2\kappa}{\sigma_0^2} x^{n-2m+1} \tag{45}$$

を与える。これから

$$n = 2m - 1 \tag{46}$$

となり，($m = 1,\ n = 1$)，($m = 2,\ n = 3$)，($m = 3,\ n = 5$)，などとなる。もっとも簡単な場合の $m = 1,\ n = 1$ では,

$$\lambda = 1 - \frac{2\kappa}{\sigma_0^2}. \tag{47}$$

この場合のランジュバン方程式は

$$\dot{x} = \kappa x + \sigma_0 x \eta(t), \tag{48}$$

となる。

つぎのような変数変換をするとわかりやすい,

$$z = \log x. \tag{49}$$

ランジュバン方程式は

$$\dot{z} = \kappa + \sigma_0 \eta(t) \tag{50}$$

この変数に対する FP 方程式は，

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial \kappa Q}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \tag{51}$$

定常状態では

$$\left(-\kappa + \frac{1}{2}\sigma_0^2 \frac{\partial}{\partial z}\right) Q = 0. \tag{52}$$

これから

$$Q \sim \exp\left\{\frac{2\kappa}{\sigma_0^2} z\right\}. \tag{53}$$

もとの確率分布では

$$P(x) = \frac{1}{x} Q(z) \sim x^{\frac{2\kappa}{\sigma_0^2}-1}. \tag{54}$$

4　加法的雑音と積雑音

4.1　加法的雑音と積雑音を含む過程

つぎのランジュバン方程式を考える，

$$\dot{x} = -(\kappa + \sigma_1 \eta_1) x + \eta_0. \tag{55}$$

ここで $\eta_{0,1}$ は，それぞれ，この線形方程式の，足し算できいてくる加法的雑音と，x に掛け算で関係する積雑音である。ともにガウス分布の白色ノイズとする。また互いに独立な確率変数であると仮定する。定数 κ と σ_1 はともに

正としておく。

第3節の(30)，(31)の定義式を用いて

$$\mu(x) = -\kappa x(t) + \frac{\sigma_1^2}{2} x(t) \tag{56}$$

と

$$\sigma^2(x) = \frac{\sigma_1^2 x^2}{2} + \frac{1}{2} \tag{57}$$

が得られる。よって確率過程(55)に対応するFP方程式は

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa x - \frac{\sigma_1^2}{2} x + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1^2 x^2 + 1)\right\} P(x,t). \tag{58}$$

時刻無限大の定常状態では[10]，

$$P \sim (\sigma_1^2 x^2 + 1)^{-\lambda} \tag{59}$$

と置くと，

$$\kappa + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \lambda\sigma_1^2 = 0 \tag{60}$$

となり密度関数の指数が定まる，

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{\sigma_1^2}. \tag{61}$$

これを第2節のパラメターβで書き直すと

$$\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{\sigma_1^2} \tag{62}$$

となる。

バネ定数がゼロの場合

式 (62) でバネ定数 κ がゼロでは，$\beta = -1/2 < 0$ となり確率密度関数の積分が無限大で発散し規格化できないことになる。そこで，バネ定数をゼロとしてなお意味のある確率密度関数となるためには積雑音の平均がゼロでなければよい。実際 μ_0 を定数としてそのようなノイズを

$$< \bar{\eta} > = \mu_0 \tag{63}$$

と仮定しよう。これは平均がゼロの η_1 をもちいて，

$$\bar{\eta} = \eta_1 + \mu_0 \tag{64}$$

と書くことができるので，最初のランジュバン方程式を

$$\dot{x} = -\sigma_1 x \bar{\eta} + \eta_0 \tag{65}$$

とすると，

$$\dot{x} = -\sigma_1 \mu_0 x - \sigma_1 \eta_1 x + \eta_0. \tag{66}$$

これは最初の式 (55) で $\kappa = \sigma_1 \mu_0$ と置いたものと等しい。結局，バネ定数の項がなくても，平均がゼロでないノイズが掛け算の項にあれば，式 (59) で定義した確率密度関数の冪の指数は，

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\mu_0}{\sigma_1} \tag{67}$$

となる。つまり指数を決定するパラメターは，積雑音の平均と標準偏差の比となる。

4.2　加法的雑音の役割

加法的雑音は，確率密度関数がベキ分布となるために本質的な役割をはたしているのだろうか？

答えはノーである。なぜなら加法的雑音がゼロのとき，最初のランジュバン方程式（55）は，

$$\dot{x} = -\kappa x + \sigma_1 \eta_1 x \tag{68}$$

となるが，これは第3.2節で $m = 1$, $n = 1$ の場合に対応する方程式と一致する。すでに求めたように，この場合の密度関数の指数 λ は

$$\lambda = 1 + \frac{2\kappa}{\sigma_1^2} \tag{69}$$

である。加法的雑音は，ベキ分布の指数には顔を覗かせない。

以上のことをまとめると，ベキ分布を与えるのは積雑音であり，もっとも簡単なモデルは，

$$\dot{x} = -\sigma_1 \bar{\eta} x \qquad \bar{\eta} = \eta_1 + \mu_0 \tag{70}$$

で与えられ，そのベキの指数は，積雑音の統計的性質，平均 μ_0 と σ_1 によって定まる。

5　積雑音を含む簡単な過程の時間依存性

前節最後の式（70）の過程の解を求めて時間依存性を調べる。式（70）は，

$$\dot{x} = -\sigma_1 \mu_0 x - \sigma_1 x \eta_1 = -\kappa x - \sigma_1 x \eta_1, \tag{71}$$

ただし $\kappa = \sigma_1 \mu_0$。また今後 σ_1，η_1 の添え字の 1 を落として議論する。

方程式（71）の解は，

$$x(t) = x(0) e^{-\kappa t - \sigma \int_0^t dt' \eta(t') dt'}. \tag{72}$$

したがって平均は

$$< x(t) > = x(0)e^{-\kappa t} < e^{-\sigma\int_0^t dt'\eta(t')dt'} > . \tag{73}$$

右辺の平均の計算はすぐにできて

$$< x(t) > = x(0)e^{-\kappa t}e^{\frac{\sigma^2}{2}t}. \tag{74}$$

どうように n 次のモーメントも

$$< x(t)^n > = x(0)^n e^{\left(-n\kappa+n^2\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \tag{75}$$

となる。この式で指数の時間 t に比例するリャプノフ指数の部分を $L(n)$ と置く。$t\to\infty$ では，もしこの指数が正なら発散する。

リャプノフ指数 $L(n)$ は n を指数として下に凸となっていてある n を越えると正になる。実際 n を連続変数とみなして $L(n^*)=0$ となる n^* が,

$$n^* = \frac{2\kappa}{\sigma^2} \tag{76}$$

より右では正となり左では負となる。定常状態とリャプノフ指数との関係はつぎのようになる。リャプノフ指数が負の領域の n はそのモーメントが有限であることを意味し，リャプノフ指数が正の領域の n ではそのモーメントが発散する。

実際，$n=1$ で指数が負であったとすると

$$\kappa - \frac{\sigma^2}{2} > 0 \tag{77}$$

これは

$$\frac{2\kappa}{\sigma^2} > 1 \tag{78}$$

となり，定常状態の確率密度関数のベキ分布の指数 λ が

$$\lambda = 1 + \frac{2\kappa}{\sigma^2} = 1 + n^* > 2 \tag{79}$$

なので，定常状態の平均が存在することを示す。どうように $n = 2$ で指数が負であったとすると

$$2\kappa - 2\sigma^2 > 0. \tag{80}$$

これから

$$\frac{2\kappa}{\sigma^2} > 2. \tag{81}$$

これは指数 λ が3よりも大きいことをしめす。

ちなみに，定常状態の分布は，3.2節ですでに求めた。変数として $z = \log x$ を採用するとランジュバン方程式は，

$$\dot{z} = -\kappa - \sigma\eta. \tag{82}$$

これは，3.2節の式（50）で $\kappa \to -\kappa$, $\sigma_0 \to \sigma$ の置き換えをすると同じものとなる。したがって任意の範囲で反射的境界を持つ解は，

$$Q(z) = Ne^{-n^* z}. \tag{83}$$

6　積雑音の一般的性質

6.1　マスター方程式による議論

前の節では，積雑音をガウス的な白色雑音と仮定したが，これは必要なことなのだろうか。またはガウス的であることがベキ分布となるために本質的な役割をになっているのだろうか。

その答えは，ノーであり，もっと一般的な積雑音でもベキ分布がでて

くる[11]。

つぎのような離散的な確率方程式で表される確率過程を考える。時刻 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ にたいして,

$$x(t+1)=b(t)x(t), \tag{84}$$

ただし確率変数 b は正またはゼロの実数をとる無相関な確率変数である。この確率変数の確率密度関数を $f(b)$ とする。

新たな変数として $z=\log x,\ \lambda=\log b$ とすると,

$$z(t+1)=z(t)+\lambda(t). \tag{85}$$

離散的な場合には FP 方程式のかわりに，つぎのようなマスター方程式が成り立つ,

$$Q(z,t+1)-Q(z,t)=\int d\lambda\{Q(z-\lambda,t)R(\lambda,t)-Q(z,t)R(\lambda,t)\}, \tag{86}$$

ただし,

$$x^{-1}Q(\log x,\ t)=P(x,\ t), \quad b^{-1}R(\log b,\ t)=f(b,\ t). \tag{87}$$

時間を無限大にもってゆく極限 $t\to\infty$ では，定常状態があれば，式 (86) の左辺はゼロとなる。すなわち

$$\int d\lambda Q(z-\lambda)R(\lambda)=Q(z). \tag{88}$$

この方程式は，つぎの簡単な解が存在する,

$$Q(z)\sim e^{-\beta z}. \tag{89}$$

これは統計物理学でよく知られたボルツマン分布である。

方程式の解が存在するために，分布 R にたいする条件は,

$$\int d\lambda e^{\beta\lambda} R(\lambda) = 1. \tag{90}$$

以上のことを元の確率変数と分布で書くと，

$$P(x) \sim x^{-1-\beta} \tag{91}$$

であって

$$< b^{\beta} > = \int dbb^{\beta} f(b) = 1. \tag{92}$$

である。

以上のことから確率変数 b と確率密度 f についての条件は特殊なものではなく，$b \geq 0$ と (92) 式だけということになる。すなわちガウス的な雑音である必要はない。

6.2　連続変数の場合との比較

前節の議論と連続変数の場合の議論と比較する。

$$\dot{x} = -(\kappa + \sigma\eta)x \tag{93}$$

は，短い時間間隔を h とすると，

$$x(t+h) - x(t) = -h(\kappa + \sigma\eta(t))x(t). \tag{94}$$

だから

$$x(t+h) = \{1 - h(\kappa + \sigma\eta(t))\}x(t). \tag{95}$$

これと式 (84) とを比べると

$$b(t) = 1 - h(\kappa + \sigma\eta(t)) \sim e^{-\kappa h - \sigma \int_0^h dt\eta(t))}. \tag{96}$$

これは，第 5 節の (72) x の解と同じ形である。したがって

$$< b(t) >= e^{-\kappa h} < e^{-\sigma\int_0^h d t\eta(t))} >= e^{-\kappa h+\frac{\sigma^2}{2}h} \tag{97}$$

であり

$$< b(t)^\beta >= e^{-\beta\kappa h+\beta^2\frac{\sigma^2}{2}h} \tag{98}$$

である。条件 (92) から

$$< b(t)^\beta >= e^{-\beta\kappa h+\beta^2\frac{\sigma^2}{2}h} = 1. \tag{99}$$

これは

$$\beta = n^* = \frac{2\kappa}{\sigma^2} \tag{100}$$

を示す。

以上のことから式 (1) であたえられる確率過程は，積雑音となる確率変数のとる値がゼロを含む正であってかつ条件式 (92) を満たせばベキ分布をあたえることがわかる。

7　多変数の場合の例

7.1　集合体の質量分布

今までは，一変数の場合を取り扱ってきた。この節では，多変数の場合についての積雑音の例として集合体の質量分布について説明する [12]。多変数といっても極限では無限個の変数を考えることになるので物理でいうと場についての確率分布を問題にすることになる。

一次元空間を考え，その離散的な場所に 1 から順に N まで番号をつける。その各点に最初の時刻では 1 ユニットの質量が置かれている。つぎの時刻では，それぞれの点での質量はジャンプしてある確率で他の地点に飛ぶ。ジャンプした先では，もし r 個の質量がジャンプしてくれば $r+1$ ユニットの一

塊の質量となる。このかたまりがつぎの時刻ではほかの地点にジャンプすることになる。一方，１つもジャンプしてこない点では質量はゼロとなっている。もしこのままこのプロセスを続けるならいつかは，すべての質量が一箇所に集まった大きなかたまりとなりそれが各点をジャンプしている状態に落ち着く。

それでは，もしジャンプ後なくなった質量が各点に注入されたとしたらどうなるだろうか？

答えは，充分時間が経過すると，質量が異なるいくつものかたまりがジャンプしている状態になっている。しかもある質量（充分大きな）を持った団子の数の割合は質量のベキ分布になっていることがわかる。

以上のことを確率過程として表現してみよう。

時刻 t における i- サイトの質量を $M(i,\ t)$ とし，j- サイトから i- サイトへジャンプする確率を $q(i,\ j)$ としその確率変数を X_{ij} としよう，注入質量を１ユニットとすると

$$M(i,\ t+1) = 1+\sum_{j=1}^{N} X_{ij}(t)M(j,\ t). \tag{101}$$

ただし $X_{ij}(t)$ は１かゼロをとる。つまり $q(i,\ j)$ の確率で１をとり $1-q(i,\ j)$ の確率でゼロをとる。また時刻 t は時刻ゼロから始めて単位時間ごとのものとする。

ここでジャンプする確率をすべて同じ確率

$$q(i,\ j) = q = \frac{1}{N} \tag{102}$$

としよう。どのサイトへのジャンプもすべて同じ確率である。

この場合には，ある一地点への r 個のジャンプがある確率は２項分布

$$C(r) = \frac{N!}{(N-r)!r!}q^{r}(1-q)^{N-r} \tag{103}$$

であるから選択した一つのサイトで $M=m$ として

$$P(m,\ t+1)=\sum_{r=0}^{N}\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_r+1=m}C(r)P(m_1,\ t)\cdots P(m_r,\ t) \tag{104}$$

が成立する。ただし m_i, $i=1, 2, \cdots, r$ は r 個のサイトのそれぞれの質量。

特性関数を，質量を連続化して，

$$Z(k,\ t)=\int dme^{ikm}P(m,\ t)=< e^{ikm} > \tag{105}$$

で定義すると，(104) は

$$Z(k,\ t+1)=e^{ik}\sum_{r=0}^{N}C(r)Z(k,\ t)^r \tag{106}$$

$$=e^{ik}(Zp+1-p)^N \tag{107}$$

$$=e^{ik}\left(1+\frac{Z-1}{N}\right)^N \tag{108}$$

$$\to e^{ik}\exp\{Z(k,\ t)-1\},\quad \text{for}\quad N\to\infty, \tag{109}$$

となる。結局，$N\to\infty$ では

$$Z(k,\ t+1)=e^{ik}\exp\{Z(k,\ t)-1\}. \tag{110}$$

ここで充分時間がたつと定常状態になると仮定して

$$Z(k)=e^{ik+Z(k)-1}=1+ik+Z-1+\frac{1}{2}(ik+Z-1)^2+\cdots. \tag{111}$$

ここで m が大きいとする近似をとる。それには微小な $|k|$ で近似すればよいから

$$Z(k,\ t)-1\sim-\gamma|k|^\beta \tag{112}$$

として，最低次までとると，

$$0 = ik + \frac{1}{2}(Z-1)^2. \tag{113}$$

これから

$$Z(k,\ t) \sim 1-\gamma|k|^{\frac{1}{2}}. \tag{114}$$

ただし[5)]

$$\gamma = \pm\sqrt{2}\,e^{-i\epsilon\pi/4}. \tag{116}$$

得られた分布は，m が大きければ

$$P(m) \sim m^{-1.5} \tag{117}$$

となる。

この例では，注入する質量が重要である。これがないと始めに述べたように一かたまりになってしまう。実際，注入する質量がない場合には

$$Z(k) = e^{Z(k)-1} \tag{118}$$

となる。これは $Z=1$ 以外に解はない。

7.2　魚群サイズの分布

質量は物理用語なので，ここでの議論が物理に限定した話であるとの誤解を避けてより適用範囲があることを示すために，この理論を魚群にあてはめた例を紹介する。状況は異なっても数学的な内容はほとんど同じになる。

魚群は，大小さまざまな群れで回遊している。その群れの大きさは，一度

5）この分布は非対称パラメター δ を含む。一般的な Levy 分布の形は，$\alpha \neq 1$ にたいして

$$\log Z(k) = i\mu k - \gamma'|k|^{\beta}\left\{1 - i\delta\epsilon\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\} \tag{115}$$

となる。ただし γ' は実数。これと比較すると，この節で求めた分布は $\delta=1$ かつ $\mu=0$ に対応する。また $\epsilon = k/|k|$。

網を入れて捕らえることができる重さで測定できる。したがって網の大きさがその上限値を与えるが収穫ごとにその重さを測ることができれば大体の群れのサイズの分布を得ることができる。

集合体の質量分布との比較で述べると，つぎのようになる。最初ある海域にN群の微小群が泳ぎまわっている。その微小単位の群の重さを1単位としてそれらが出会うたびに合流して大きな群れとなる。そして微小単位の群れは，その期間の間，総数Nが不変になる形でその海域から供給されるとする。この条件により，ある群れの全体の重さは，一期間たつと，その間に合流するほかの群れによって増大するが，それを続けても最後にたった一つの群になって終わるのではなく，様々なサイズの群れが存在することになる。

ある群が他の群に遭遇する確率は，魚群のスピードが充分大きければ群どうしの距離的な遠近は無視できるので，皆等しいと考えることができる。つまり最初に近くにいたものどうしが合流する確率が遠くにいたものどうしの合流確率と異ならないとする。

以上の仮定は，集合体の質量分布と同じ数式で表現できる。その結果，魚群のサイズ（質量）mに対する魚群の数，すなわち漁獲頻度$N(m)$はmのベキ分布で表され

$$N(m) \sim m^{-\frac{3}{2}} \tag{119}$$

となるはずである。

1976年から1982年の7年間に収穫されたまぐろ（様々な種類を含む）の1トン以上20トン程度までの分布はよくこの分布にしたがっている。この20トン程度の重さは使われた周辺の長さ2 km程度の網の上限値に近いものである。

以上の議論には生態学的な情報は必要がなかった。ベキ分布をだすための唯一の仮定は，二つ以上の群が遭遇すると必ず新たな群れをつくる，ということである。魚群がどのように分離しまた結合するかという細かな情報は必要がなかった。どの群れも特別扱いをせず同じ取り扱いをした統計的性質で

ベキ分布の指数は定まっている。

8　おわりに

この論文では，ベキ分布を与える確率過程の簡単な場合について調べ，ベキ分布の指数は，簡単な場合には積雑音の統計的性質によってきまることを示した。多変数の場合に，ベキ分布になるための簡単な条件を求めることができるかどうかはこれからの課題である。また具体的なモデルについては多変数の場合以外には触れなかった。個々のモデルは詳細な議論が必要であり専門的にならざるを得ない。つぎの課題としたい。

一見複雑に見える現象にもベキ分布のような単純な法則が存在する。これは確率過程の背後にあるフラクタル的性質の表れであるとみることもできる。すなわち，スケール則はフラクタクルの現れであり，ランダムな時系列データの複雑さはそれを反映している。そのようなスケール則を満たす分布がベキ分布である[13]。

フラクタルだけではなく，カオス理論など複雑な現象を記述する数学的な道具がそろってきている。コンピュータが社会にもたらしたものは便利さだけではなく，複雑な現象についての実際のデータの蓄積であり，以前は考えられなかったような分野でもデータを踏まえた議論が可能になりつつある。今後ますますこの傾向に拍車がかかるとすると，様々な分野で異なって見える現象を同じ数学的取り扱いをする必要がでてくるに違いない。そのためには学際的研究がますます重要になると思われる。そのような方向として経済物理学という名称で統計物理学の雑誌にも多くの実証的分析が掲載されている[14]。

9　謝辞

早稲田大学理工学部の大場一郎教授に感謝いたします。Stanley 達の論文

や関連する論文のコピーを最初に送ってくださり興味を引き出していただきました。

参 考 文 献

[1] Mantegna, R. N., Stanley, H. E. "Scaling Behavior in the dynamics of an economic index", *Nature*, Vol. 376, (1995), pp. 46–48. Mantegna, R. N., Stanley, H. E. "Turbulence and financial markets", *Nature*, Vol. 383, (1996), pp. 587–588.

[2] 沢木勝茂『ファイナンスの数理』朝倉書店，1994年，pp. 21–39。

[3] Bonabeau, E., Dagorn, L., "Possible universality in the size distribution of fish schools", *Physical Review E*, Vol. 51, (1995), pp. R5220–R5223.

[4] 高安秀樹「物理学と経済の最近の出会い」，『パリティ』第14巻1999年，pp. 64–76。

[5] Stanley, H. R., Amaral, A. N., Burdayrev, S. V., Havlin, S., Leschorn, H., Maass, P., Salinger, M. A., Stnley, H. E., "Scaling behavior in the growth of companies", *Nature*, Vol. 379, (1996), pp. 804–806.

[6] Provata A., Nicolis, C., "A Microscopic Aggregation Model of Droplet Dynamics in Warm Clouds", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 74, (1994), pp. 75–89.

[7] Goel, N. S., Richter-Dyn, N., *Stochastic Models in Biology*, New York : Academic Press, 1974, 寺本英，新田克巳，芦田廣 訳『生物学における確率過程の理論』産業図書，1978年。

[8] Gardiner, C. W., *Handbook of Stochastic Methods*, Berlin : Springer, 1985.

[9] Shlesinger, M. F., Frish, U., and Zaslavsky, G. (eds), *Levy Flights and Related Phenomena in Physics*, Berlin : Springer, 1995.

[10] Deutsch J. M., "Probability distributions for one component equations with multiplicative noise", *Physica A*, Vol. 208, (1994), pp. 433–444.

[11] Levy, M., Solomon, S., "Power laws are logarithmic Boltzmann Laws", *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 7, (1996), pp. 595–601.

[12] Takayasu, H., "Steady-State Distribution of Generalized Aggregation System with Injection", *Physical Review Letters*, Vol. 63, (1989), pp. 2563–2565.

[13] Feder, J., *Fractals*, New York : Plenum Press, 1988, 松下貢，早川美穂，佐藤信一 訳『フラクタル』啓学出版，1991年。

[14] 経済物理学のホームページはいくつかあるが代表的なものは "http://www.unifr.ch/econophysics/." 日本のものとしては，"http://www.geocities.co.jp/WallStreet-Stock/4937/" が関連サイトのリンクも充実している。