

AR 単位根と MA 単位根

河 田 正 樹

1 はじめに

Dickey-Fuller 流の検定をはじめとする単位根検定の問題点として、定常である系列を誤って単位根を含む系列であると判断してしまうということがある。Sims [5] はこの問題について、ベイジアンアプローチによる解決を提唱し、その後ベイジアン単位根検定についての数多くの研究がなされた。伝統的アプローチでは、帰無仮説を棄却する強い証拠がない限り、帰無仮説が棄却されないのに対し、ベイジアンアプローチでは帰無仮説と対立仮説を同等に扱うということがある。この点に注目したのが Kwiatkowski et al. [2] であり、彼らは帰無仮説と対立仮説を入れ替えた検定の必要性を提唱した。この Kwiatkowski et al. の検定（以降これを KPSS 検定とあらわす）は MA 単位根の検定と同値となることが知られている。

Koop and van Dijk [3] は、この KPSS 検定に用いられたモデルについてのベイジアンアプローチを提唱した。河田 [1] では、KPSS 検定と Koop and van Dijk の検定の比較をシミュレーション実験でおこなった。本稿ではこのモデルについて、より詳細な検討をおこなう。また、Koop and van Dijk [3] は、KPSS 検定のモデルに AR 項も加えたモデルも提唱している。本稿ではこのモデルについても KPSS 検定と Koop and van Dijk の検定の比較検討をおこなっていく。

次節以降では、最初に AR 単位根と MA 単位根の特徴について、時系列プロットや標本自己相関のコログラムなどを用いて視覚的に整理する。その上で、AR 単位根と MA 単位根を同時に含むモデル、KPSS 検定のモデ

ル, Koop and van Dijk の提唱したモデルについての考察をおこなう。

2 AR 単位根

単位根という言葉は, 多くの場合この AR 単位根を指している。AR 単位根を含む系列は, 差分をとった系列が定常系列となる。

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim (0, \sigma_u^2), i.i.d. \quad (1)$$

という定数項なしの AR(1) モデルを考えると, $|\rho| < 1$ のとき, 系列は定常な系列となる。図 1, 図 2 は $\rho = 0.5$ のときの時系列プロットと標本自己相関 (AC) のコレログラムである。定常な系列は平均 (ここでは 0) を何度も横切り, 標本 AC 関数は減衰していく。

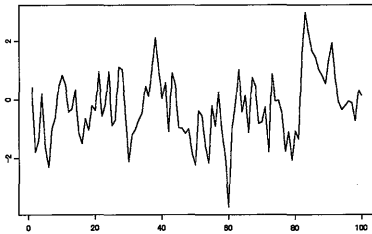


図 1: $\rho = 0.5$ の系列

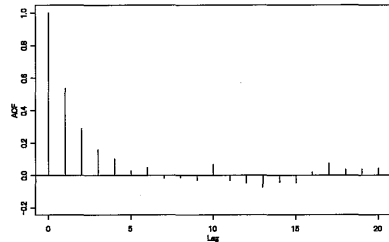


図 2: 左の系列の標本 AC 関数

$|\rho| = 1$ のとき, この系列は単位根を含む系列といわれる。 $\rho = 1$ のときこのモデルは,

$$y_t = y_{t-1} + u_t \quad (2)$$

となる。これは

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^t u_i \quad (3)$$

という初期値と過去の誤差項の和に変形することができる。これはランダムウォークモデルといわれるものである。

このモデルの差分系列 Δy_t を考えると、

$$\Delta y_t = u_t \quad (4)$$

という定常な誤差項になる。

図3、図4は $\rho = 1$ のときの時系列プロットとコレログラムである。定常な場合と異なり、系列が平均を横切る回数は非常に少なく、レベルの変動がみられる。またコレログラムの減衰のしかたはゆるやかである。

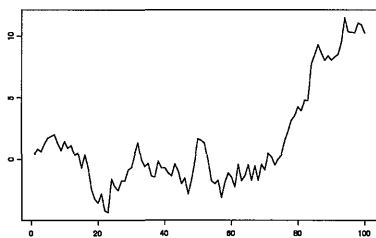


図3: $\rho = 1$ の系列

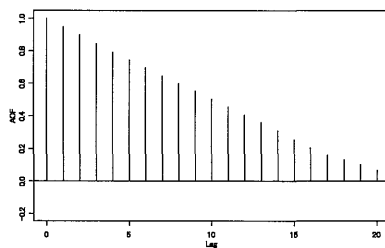


図4: 左の系列の標本 AC 関数

図5、図6は図3、図4の系列の1次差分をとったものである。これらからは定常な系列の特徴を見ることができる。

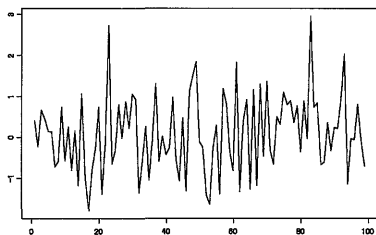


図5: $\rho = 1$ の系列の1次差分

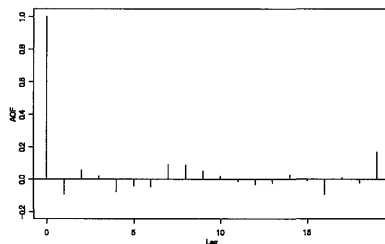


図6: 左の系列の標本 AC 関数

図7, 図8は図3, 図4の系列の2次差分をとったものである。図7は図5よりも平均を横切る回数が多い。図8からは, 1期ラグのところに強い負の自己相関があることが示唆される。これらは差分過剰の状態を示すものである。

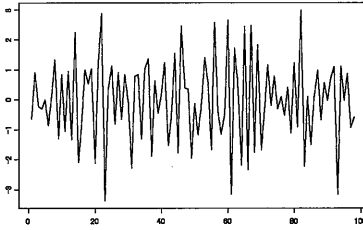


図7: $\rho = 1$ の系列の2次差分

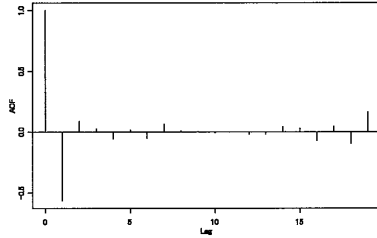


図8: 左の系列の標本AC関数

3 MA 単位根

$$y_t = u_t - \phi u_{t-1}, \quad u_t \sim (0, \sigma_u^2), \text{ i.i.d.} \quad (5)$$

という定数項なしの MA(1) モデルを考えたとき, $|\phi| = 1$ のとき, MA 単位根となる。

z_t という系列があり, $y_t = \Delta z_t$ であるとするとき, $\phi = 1$ のとき,

$$z_t = z_0 + \sum_{i=1}^t y_i = u_t + (z_0 - u_0) \quad (6)$$

となる。 $z_0 = u_0$ を仮定すると, z_t は定常な誤差項となるので, y_t はこれをさらに差分をとったものとなる。それゆえ, MA 単位根は差分過剰の状態と見ることができる。

図9は MA 単位根を含む系列で, 図10はその y_t から求めた z_t である。図9は図7と, 図10は図5と似ていることがみてとれる。

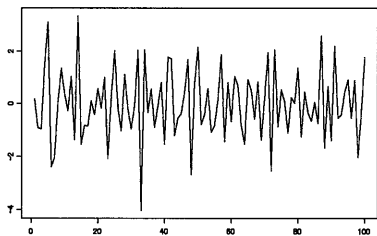


図9：系列 $y_t(\phi = 1)$

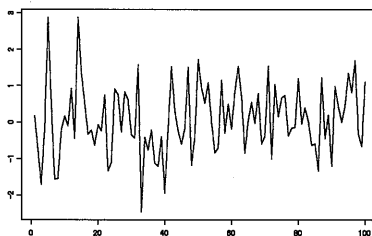


図10：系列 $z_t(\phi = 1)$

このモデルにおいて $H_0: \phi = 1$ vs. $H_1: \phi \neq 1$ という検定をおこなうことは、系列 z_t について $H_0: I(0)$ vs. $H_1: I(1)$ という検定を行うことに等しいことである。

4 AR 単位根と MA 単位根をともに含むモデル

ARMA(1, 1) モデルにおいて、AR, MA 両方の部分に単位根を含むモデルを考えてみる。

$$y_t = y_{t-1} + u_t - u_{t-1}, \quad u_t \sim (0, \sigma_u^2), \text{ i.i.d.} \quad (7)$$

このモデルを変形すると

$$y_t = u_t + (y_0 - u_0) \quad (8)$$

となる。ここで $y_0 = u_0$ を仮定すると、 y_t は定常な誤差項となる。

このモデルは AR 単位根と MA 単位根が相互に打ち消しあっている状態であるといえよう。このことから、ARMA モデルにおいて MA 項の係数が 1 に近い場合には、AR 単位根が存在してもそれを検出することが困難になることが想像できる。

5 KPSS のモデル

Kwiatkowski et al. [2] は次のようなモデルを考えた。

$$y_t = \tau_t + e_t, \quad e_t \sim (0, \sigma_e^2), \text{ i.i.d.} \quad (9)$$

$$\tau_t = \tau_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim (0, \sigma_u^2), \text{ i.i.d.} \quad (10)$$

このモデルの u_t の分散 σ_u^2 について、

$$H_0: \sigma_u^2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \sigma_u^2 \neq 0$$

という検定をおこなうのが KPSS 検定である。

このモデルを変形すると

$$\tau_t = \tau_0 + \sum_{i=1}^t u_i \quad (11)$$

となるので、

$$y_t = \tau_0 + \sum_{i=1}^t u_i + e_t \quad (12)$$

となり、帰無仮説のもとでは τ_t は定数となり、 y_t は定常な誤差項に定数を加えたものとなる。一方対立仮説のもとでは、 y_t はランダムウォークに定常な誤差項を加えたものとなり、この検定は $H_0: I(0)$ vs. $H_1: I(1)$ という検定であるといえる。

この $H_0: I(0)$ vs. $H_1: I(1)$ という検定は、MA 単位根の検定と同様であるが、KPSS 検定において、 $u_t = (1-\phi)v_t$, $e_t = \phi v_t$, $y_t = x_t$ とすると、

$$x_t = \tau_0 + (1-\phi) \sum_{i=1}^t v_i + \phi v_t \quad (13)$$

となり、 Δx_t を考えると

$$\begin{aligned}\Delta x_t &= (1-\phi)v_t + \phi\Delta v_t \\ &= v_t - \phi v_{t-1}\end{aligned}\tag{14}$$

という MA(1) モデルに変形できる。

Koop and van Dijk [3] では $\theta = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_e^2}$ という変形により、 $H_0: \sigma_u^2 = 0$ vs. $H_1: \sigma_u^2 \neq 0$ という検定のかわりに $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta \neq 0$ という検定を提唱した。

この θ は分散 σ_e^2 と σ_u^2 の大きさの比に関係がある。たとえば θ が 0.01 ならば、 $\sigma_u^2: \sigma_e^2 = 1:99$ となる。 θ の値が大きくなるほど σ_u^2 の σ_e^2 に対する比率が大きくなり、 y_t はランダムウォークの影響を受けることになる。

また y_t は系列に含まれる観測値の数にも影響を受ける。 $\theta = 0.01$ のとき、 $t = 100$ であればランダムウォークと定常な誤差項の影響はほぼ等しいのに対し、 $t = 200$ になると、ランダムウォークの影響のほうが大きくなる。観測値の数が大きくなるにつれ、同じ θ でもランダムウォークの影響が大きくなる。

河田 [1] ではこのモデルについて、KPSS 検定と Koop and van Dijk の提唱したバイズファクターによる検定の比較をシミュレーション実験によっておこなった。

KPSS 検定は

$$\hat{\eta} = \frac{T^{-2} \sum S_t^2}{s^2(l)}\tag{15}$$

という検定統計量を用いる。ここで、

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T e_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s}, \quad w(s, l) = 1 - s/(l+1)$$

である¹⁾。

注 1) Kwiatkowski et al. [2] pp. 164-165.

ベイズファクターは

$$B = \frac{(\mathbf{y}'\mathbf{y})^{-T/2}}{|\mathbf{V}|^{-1/2}(\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y})^{-T/2}} \quad (16)$$

である。ここで、

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_T + \frac{\theta}{1-\theta} \mathbf{C}\mathbf{C}', \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である²⁾。

θ の値をいくつか変化させて系列を発生し、これらの検定を適用した。 $\theta = 0.01$ の時の結果は表 1 のようになった。

表 1: 検定どうしの関係 ($\theta = 0.01$)

		B		
		I (0)	I (1)	計
$\hat{\eta}$	I (0)	22	19	41
	I (1)	9	50	59
	計	31	69	100

このうちいくつかの系列について視覚的に検討していく。

KPSS 検定とベイズファクターでともに I (1) と判断された系列には、次のようなものがある。図11からは平均が小さくなっているものの、平均線を横切るが多いことがみてとれる。図12から非定常であることを判断することは非常に困難である。

2) Koop and van Dijk [3] p. 267.

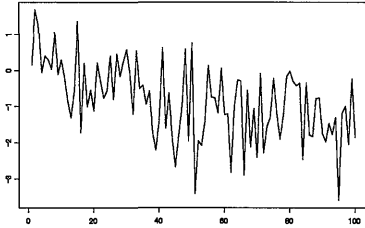


図11: KPSS: I(1), B: I(1) の系列

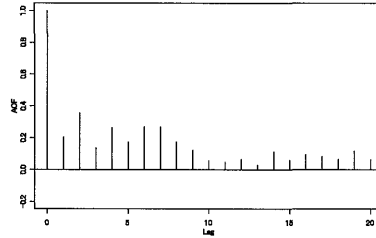


図12: 左の系列の標本 AC 関数

図13, 図14は KPSS 検定で I(1), ベイズファクターで I(0) と判断された系列であり, 図15, 図16は KPSS 検定で I(0), ベイズファクターで I(1) と判断された系列である。これらのいずれも, 非定常であることを見てとることは困難である。また, KPSS 検定とベイズファクターの相違を読み取ることも難しい。

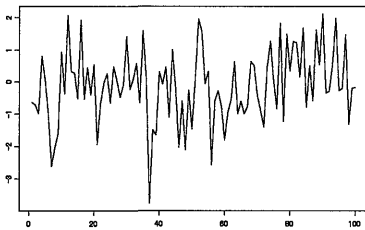


図13: KPSS: I(1), B: I(0) の系列

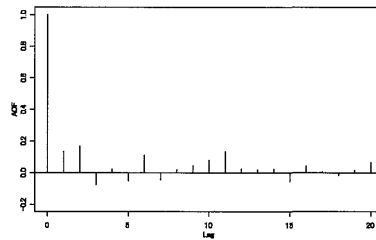


図14: 左の系列の標本 AC 関数

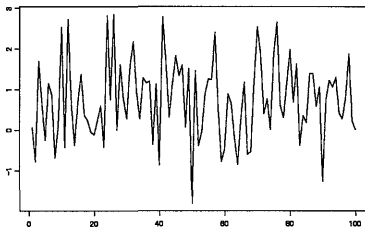


図15: KPSS: I(0), B: I(1) の系列

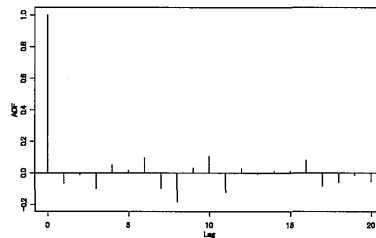


図16: 左の系列の標本 AC 関数

6 Koop and van Dijk のモデル

Koop and van Dijk [3] は, KPSS 検定のモデル (9), (10) に AR 項を加えた次のようなモデルを考えた。

$$y_t = \rho y_{t-1} + \tau_t + e_t \quad (17)$$

$$\tau_t = \tau_{t-1} + u_t \quad (18)$$

このモデルを変形すると

$$y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^t u_i + e_t \quad (19)$$

となる。

このモデルは ρ と θ の値によって次のように分類される。

1. ($\rho = 1 \cap \theta = 0$) のとき I (2)
2. ($\rho = 1 \cap \theta \neq 0$) または ($\rho \neq 1 \cap \theta = 0$) のとき I (1)
3. ($\rho \neq 1 \cap \theta \neq 0$) のとき I (0)

このモデルについて ρ と θ の値をいくつか変え, KPSS 検定とベイズファクターによる検定をおこなってみた。ここでのベイズファクターは $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta \neq 0$ を検定するもので,

$$B = \frac{(\mathbf{y}'_{-1} \mathbf{y}_{-1})^{-1/2} (\mathbf{y}' \mathbf{M} \mathbf{y})^{-(T-1)/2}}{\int_{\theta \neq 0} |\mathbf{V}|^{-1/2} (\mathbf{y}'_{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_{-1})^{-1/2} (s^2)^{-(T-1)/2} d\theta} \quad (20)$$

である。ここで,

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{y}'_{-1} (\mathbf{y}'_{-1} \mathbf{y}_{-1})^{-1} \mathbf{y}_{-1}$$

$$s^2 = (\mathbf{y} - \hat{\rho} \mathbf{y}_{-1})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \hat{\rho} \mathbf{y}_{-1})$$

$$\hat{\rho} = (\mathbf{y}'_{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_{-1})^{-1} \mathbf{y}'_{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}$$

である³⁾。検定の結果をまとめたものが表2である。

3) Koop and van Dijk [3] p. 283.

表2：検定どうしの関係

	$\rho=0$		$\rho=0.2$		$\rho=0.5$		$\rho=0.85$		$\rho=1$		
	$\hat{\eta}$	B [K(1)] 計	$\hat{\eta}$	B [K(1)] 計	$\hat{\eta}$	B [K(1)] 計	$\hat{\eta}$	B [K(1)] 計	$\hat{\eta}$	B [K(1)] 計	
$\theta=0$	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	
	97 2 99	0 21 100	0 3 100	79 21 100	0 21 100	63 37 100	0 37 100	83 90 100	10 82 92	0 11 11	0 89 89
$\theta=0.01$	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計
	22 9 31	19 50 69	41 59 100	15 20 35	8 57 65	18 77 100	3 77 100	18 82 82	2 25 27	1 72 73	3 97 100
$\theta=0.05$	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計
	5 1 6	7 87 94	12 88 100	2 7 9	4 67 91	5 94 100	5 94 100	5 95 100	0 10 10	0 90 90	0 4 4
$\theta=0.5$	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計
	0 0 0	0 100 100	0 100 100	0 4 4	0 96 96	0 100 100	0 100 100	0 98 98	0 0 0	0 100 100	0 0 0
$\theta=0.99$	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計	[K(1)] 計
	0 0 0	0 100 100	0 100 100	0 2 2	0 98 98	0 100 100	0 100 100	0 100 100	0 0 0	0 100 100	0 0 0

KPSS 検定では ρ の値, θ の値が増加するにつれ, $I(1)$ と判断される系列が増えていくのがわかる。一方, ベイズファクターは $\theta = 0.01$ のとき, ρ が 0 から増加するにつれて, いったん $I(0)$ と判断される系列が増加し, $\rho = 0.5$ をさかいに $I(1)$ と判断される系列が増加する。この傾向は $\theta = 0.05$ のときにもみられ, 非常に特徴的な変動をしているといえよう。

ここで, $\theta = 0.01$, $\rho = 0.5$ のいくつかの系列について視覚的に検討してみる。

KPSS 検定とベイズファクターでともに $I(1)$ と判断された系列には, 次のようなものがある。これは図18の減衰が遅いことから非定常の可能性が示唆される。

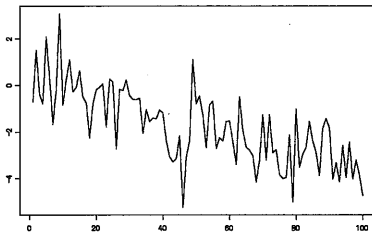


図17: KPSS: $I(1)$, B: $I(1)$ の系列

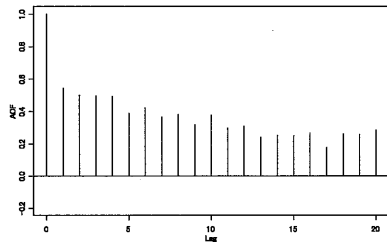


図18: 左の系列の標本 AC 関数

KPSS 検定とベイズファクターのどちらか一方のみで $I(1)$ と判断された系列は, 時系列プロットやコログラムから非定常の可能性が示唆されるものはあまりない。しかし, 中には次のようなものもある。この図19, 図20は図17, 図18と似ており, 図20の減衰が遅い。これは非定常の可能性を否定できない。しかし, ベイズファクターではこれを $I(0)$ と判断しているのである。

シミュレーションの設定ではこれは定常なモデルである。しかし, ρ と θ の相互作用によって非定常な系列を生み出すことがあるのではなかろうか。このようなモデルを $I(0)$ と判断することは, ベイズファクターによる検定

の1つの特徴であるといえよう。

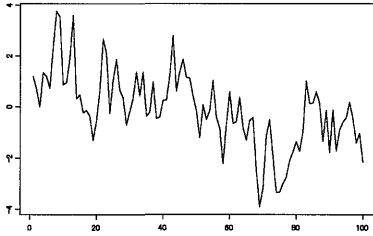


図19：KPSS：I(1), B:I(0) の系列

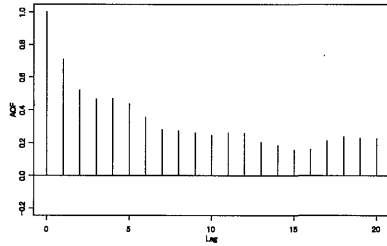


図20：左の系列の標本 AC 関数

ところで、図21、図22のような系列があった。これはここで考察した図17、図18や、図19、図20と似ている。この図21、図22の系列は

$$y_t = y_{t-1} + u_t - 0.8u_{t-1} \quad (21)$$

というモデルである。このモデルの AR 単位根は、MA 部分の係数の大きな値に影響を受けているため、はっきりと I(1) の特徴を見ることはできない。Koop and van Dijk のモデルも ρ と θ の相互作用によって I(0) か I(1) かの判断が困難な系列となっているのではなかろうか。

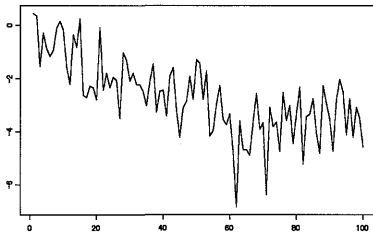


図21：ARMA (1, 1) $\rho = 1, \phi = 0.8$ の系列

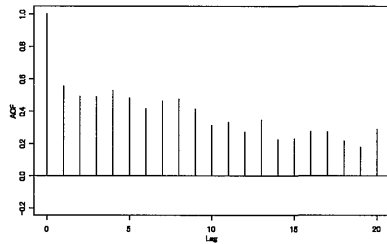


図22：左の系列の標本 AC 関数

7 おわりに

本稿では KPSS 検定で用いられたモデルについての再検討をおこない、Koop and van Dijk [3] で提唱された、AR 項を入れたモデルについての検定結果をまとめ、さらに視覚的な検討を加えた。

シミュレーションの結果をみると、AR 項を入れないモデルではバイズファクターによる検定のほうが、KPSS 検定よりも H_0 を採択することが多いのであるが、AR 項を入れた場合には反対に KPSS 検定のほうが H_0 を採択することが多くなっている。そもそもベイズアンアプローチは帰無仮説と対立仮説を同等に扱うため、伝統的アプローチより H_0 を採択することが多いはずである。これは AR 項の係数が、検定結果に対して何らかの影響を与えていると考えられよう。

また、ベイズアンアプローチが帰無仮説と対立仮説を同等に扱えるのであれば、Sims [5] 以降提唱されたベイズアンアプローチによる検定結果と対称な結論を導かなくてはならない。ただし、これは帰無仮説、対立仮説それぞれのもとでのモデルが対称をなしているという前提が必要となるものである。

これらの点についての考察は今後の課題としていきたい。

参 考 文 献

- [1] 河田 正樹 (2001) 「状態空間モデルにおける単位根検定—ベイズアの視点から—」『徳山大学論叢』55・56, 1-15.
- [2] Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin, (1992), "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root," *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.
- [3] Koop, G. and H. K. van Dijk, (2000), "Testing for integration using evolving trend and seasonal models : A Bayesian approach," *Journal of Econometrics*, 97, 261-291.
- [4] Maddala, G. S. and I. M. Kim, (1998) *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press.

- [5] Sims, C. A., (1988), "Bayesian skepticism on unit root econometrics," *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 463-474.
- [6] Stock, J. H., (1994), "Unit roots, structural breaks and trends," in Engle, R. F. and D. L. McFadden, (eds.) *Handbook of Econometrics*, vol. 4, North-Holland, 2739-2841.
- [7] Tanaka, K., (1996), *Time Series Analysis*, John Wiley & Sons.