破産確率の数値計算

不公平なゲームの場合

山　岸　憲　治

1　はじめに

つぎのようなゲームを考える．６行６列の碁盤状の桝目の上を黒石と白石とが埋め尽くしている．大小二つのさいころを投げ，大のサイコロの目を行の番号とし小のサイコロの目を列の番号とする．もし出た二つの目の桝目に黒石があれば，任意の位置の白石を二つ取り除き代わりに黒石を置くことができる．逆にそこに白石があれば，任意の位置の黒石を一つ取り除き代わりに白石を置くことができる．これを繰り返し行い黒白どちらか一方がすべての桝目を占有したときゲームが終わる．すべてが黒石になれば黒石の勝利，逆に白石がすべての桝目を占有したとき白石の勝利となる．

このゲームは，明らかに黒石側が有利となる不公平なゲームである．二つのサイコロの目が黒石にヒットしたとき，黒石は二つ増加するが逆の場合白は一つしか増えない．ただし，最初に黒石が占める桝目の数が勝敗を大きく左右する．最初に黒石の数が白石の数と比べより少ないと，サイコロを投げた結果は，白石のある桝目にあたる確率が大きくなり黒石が減る可能性が増え必ずしも黒石が有利とは言えない．以下このようなゲームを便宜上碁石ゲームと呼ぶことにする．この論文で扱うのは不公平な碁石ゲームである．

碁石ゲームは，黒白どちらも同じ数だけ増加する公平なものであれば遊びのゲームとして成立するが，そうでなければゲームとしては使えない．碁石ゲームで唯一公平な場合というのは，最初に黒石と白石が同じ数だけ盤面上にあり，しかもサイコロの目がヒットしたとき，白黒ともに同じ数だけ増加し，外れた

とき減少する場合である.

不公平な碁石ゲームは，現実的世界の簡単なモデルとして見ることができる.

例えば，限られた領域の中に棲み分ける2種類の生物の攻防のモデルとみなせる[1]. 黒石に代表される生物は，繁殖力が強く白石に対応する生物より2倍の勢いで増える. しかし最初数が少ないと白により多くのチャンスが生まれる. これは餌の争奪戦により数の多い白のほうが有利な場合と解釈できる. この場合には黒石が生き残るチャンスは少ない. 逆にある数以上の領域を占めると圧倒的に速く全領域を独占してしまう.

黒石を新たなビジネスモデルで展開するコンビニのようなチェーン店とみなすこともできる. すでに他社の店が展開しているような地域に新たに出店しようとするとき，最初に店の数が少なければ価格競争をしかけてくる周辺の既存店に勝つチャンスは小さい.

碁石ゲームは，またギャンブルの一側面のモデルとみなすこともできる[2]. 当たれば掛け金より大きな金額を得ることができるが当たるチャンスが少ないのは最初黒石が少ない場合に対応している.

以上のように，このゲームをより現実に近い最も簡単なモデルの一つとみなせる. 碁石ゲームを学生のシミュレーション教材として提供することにより，公平なゲームよりは，確率・統計的なものの見方や現実との関連により強い興味を引き起こすことができる.

碁石ゲームを黒石の数一次元のランダムウォークとみなすと，0と36に二つの吸収壁がある破産問題である[2]. 黒石が m 個あったとき，さいころを投げるとその結果，黒石は2個増え $m+2$ になるか1個減り $m-1$ になるかどちらかである. 増える確率は，36ある桝目のなかで m 個黒石が占めているので，36分の m である. 逆に白石は $36-m$ あったものが，2個減るか1個増えるかどちらかで，増える確率は，36分の $36-m$ である. このようなランダムウォークでは，パラメターは，全体の桝目の数36と最初の黒石の数のみである.

二つの吸収壁のあるランダムウォークの方程式はわかっており，それは連立一次方程式となる[2]. 一般的に全体の桝目の数を u とすると $u-1$ 個の未知数

を含む方程式で，この数が小さいときは，その解を書き下すことは簡単である．

この論文では，碁石ゲームに関する幾つかの確率と平均値を計算する．

第２節では，碁石ゲームの最初の黒石が m 個あるとき黒が負ける確率すなわち破産確率の方程式の解を求める．第３節では，数値計算のための漸化式を導きそれを使った結果を図に表示する．

第４節では，ゲームの最初から終了までのサイコロの平均トス回数，言い換えるとゲームの平均継続回数の解を求め数値計算の結果を図に示す．最大でおよそ27回であることがわかる．

第５節では，２～４節で用いた方程式を導き，黒石が破産するまでのサイコロの平均トス回数とその確率分布を求める．

第６節では，コンピュータ上でのシミュレーションとの比較について議論する．また教室で実際にこの碁石ゲームを実施する場合の準備や実施方法についてコメントする．

2　碁石ゲームの破産確率

2.1　破産確率の方程式

黒石の数をmとする．数mから$m+2$に移る確率をλ_mと書き，ひとつ下の$m-1$移る確率をμ_mとする．ただし，

$$\lambda_m+\mu_m=1. \tag{1}$$

碁石ゲームでは，桝目の数は全体で36あるが簡単のために全桝目数を u と書く．するとmより多い数$m+2$に移る確率は,

$$\lambda_m=\frac{m}{u} \tag{2}$$

である．最初黒石の数mから出発して破産する(黒石が負ける) 確率をB_mとするとつぎが成り立つ[2]（第５節参照),

$$B_m=\lambda_m B_{m+2}+\mu_m B_{m-1}, \qquad 1\leq m\leq u-1. \tag{3}$$

ただし，最初$m=0$では確実に黒が破産しているので，境界条件として$B_0=1$

よって$m=1$の方程式では，

$$B_1=\lambda_1 B_3+\mu_1 B_0=\lambda_1 B_2+\mu_1 \tag{4}$$

が成立する．

また吸収壁uでは，確実に黒が勝利しているので$u\leq m$に対して$B_m=0$，したがって

$$B_{u-2}=\lambda_{u-2}B_u+\mu_{u-2}B_{u-3}=\mu_{u-2}B_{u-3}\,,$$
$$B_{u-1}=\lambda_{u-1}B_{u+1}+\mu_{u-1}B_{u-2}=\mu_{u-1}B_{u-2}\,, \tag{5}$$

が成立する．

2.2 方程式の解

破産確率B_mは，もしmと等しいかより小さい数iに対するμ_iのどれか一つがゼロなら決して破産しないので，$0<m<u$に対して，

$$B_m=\mu_1\mu_2\cdots\mu_m b_m \tag{6}$$

と書くことができる．これを用いると方程式(3)は，b_mについてのものとなり，

$$b_m=\lambda_m\mu_{m+1}\mu_{m+2}b_{m+2}+b_{m-1}\,,\qquad 1\leq m\leq u-1 \tag{7}$$

となる．新たな記号として

$$t_i=\lambda_i\,\mu_{i+1}\mu_{i+2}\,, \tag{8}$$

と定義すると (7) は，

$$b_m=t_m b_{m+2}+b_{m-1}\,,\qquad 1\leq m\leq u-1 \tag{9}$$

となる．

境界条件 (5) は，

$$b_{u-1}=b_{u-2}=b_{u-3}\,. \tag{10}$$

また (4) は

$$b_1=t_1 b_3+1. \tag{11}$$

方程式(9)は，u-1個の変数を持つ連立一次方程式であるからクラメールの公式を使って書き下すことができる．ここではそうしないで解がつぎのような形になることを仮定しよう，

$$b_m = a\left(1 - \sum_{i=m+1}^{u-3} t_i c_i\right), \qquad 0 < m < u. \tag{12}$$

ただし，$b_{u-3}=a$と置いた．ここで c_i がこれから決定する未定の係数である．

式 (12) は，$m = u-1, u-2, u-3$にたいしては$b_m=a$となり，$1<m<u-3$，については，b_m-b_{m-1}が

$$b_m - b_{m-1} = a t_m c_m \tag{13}$$

となる．この式を (9) に代入すると，

$$a t_m c_m = a t_m\left(1 - \sum_{i=m+3}^{u-3} t_i c_i\right) \tag{14}$$

となるので未定の係数 c_i に対する方程式，

$$c_m = 1 - \sum_{i=m+3}^{u-3} t_i c_i \tag{15}$$

を得る．これを繰り返し使って代入すると

$$\begin{aligned} c_m &= 1 - \sum_{i=m+3}^{u-3} t_i \left(1 - \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j c_j\right) \\ &= 1 - \sum_{i=m+3}^{u-3} t_i + \sum_{i=m+3}^{u-6} t_i \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j c_j . \end{aligned} \tag{16}$$

これを繰り返せば c_mが決定できる．ただし，第3項目の i についての和の上限は，j についての和の上限により制限され，$j=i+3\leq u-3$から，$u-6$となる．

和の項の続く回数を求めよう．和の項の数をk_m^cとすると，和記号の下限$3k_m^c+m$が和記号の上限$u-3$と一致するとき和が増加する．したがって，

$$k_m^c = \left[\frac{u-3-m}{3}\right]. \tag{17}$$

ここで括弧は，ガウス記号で，カッコ内の数値の小数点以下を無視することを意味する．

式(15)を繰り返し代入して求めたc_mを(12)に代入して

$$b_m = a\left(1-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i + \sum_{i=m+1}^{u-6} t_i \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j - \sum_{i=m+1}^{u-9} t_i \sum_{j=i+3}^{u-6} t_j \sum_{k=j+3}^{u-3} t_k + \cdots\right). \tag{18}$$

定数aは境界条件(11)により決定される，

$$a\left(1-\sum_{i=2}^{u-3} t_i c_i\right) = t_1 a\left(1-\sum_{i=4}^{u-3} t_i c_i\right)+1. \tag{19}$$

これから

$$a = \frac{1}{1-\sum_{i=2}^{u-3} t_i c_i - t_1\left(1-\sum_{i=4}^{u-3} t_i c_i\right)}. \tag{20}$$

この分母をDと置いて，整理する，

$$\begin{aligned} D &= 1-\sum_{i=2}^{u-3} t_i c_i - t_1\left(1-\sum_{i=4}^{u-3} t_i c_i\right) \\ &= 1-\sum_{i=2}^{u-3} t_i c_i - t_1 c_1 \\ &= 1-\sum_{i=1}^{u-3} t_i c_i \end{aligned} \tag{21}$$

となる．式(16)のc_iを使って書くと，

$$\begin{aligned} D &= 1-\sum_{i=1}^{u-3} t_i + \sum_{i=1}^{u-6} t_i \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j - \sum_{i=1}^{u-9} t_i \sum_{j=i+3}^{u-6} t_j \sum_{k=j+3}^{u-3} t_k + \cdots \\ &= 1+\sum_{j=1}^{k_D} (-1)^j \sum_{i_1=1}^{u-3j} \sum_{i_2=i_1+3}^{u-3(j-1)} \cdots \sum_{i_j=i_{j-1}+3}^{u-3} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} \cdots t_{i_j}. \end{aligned} \tag{22}$$

ただし，k_Dは(17)で$m=1$としたものに余分に和がひとつ加わるので

$$k_D = \left[\frac{u-4}{3}\right] + 1 = \left[\frac{u-1}{3}\right]. \tag{23}$$

b_mの分子部分をn_mと置いて分母部分と分離し

$$b_m = \frac{n_m}{D}, \tag{24}$$

とすると分子 n_m は，(18) のカッコ内で与えられる；

$$n_m = 1 - \sum_{i=m+1}^{u-3} t_i + \sum_{i=m+1}^{u-6} \sum_{j=i+3}^{u-3} t_i t_j - \sum_{i=m+1}^{u-9} \sum_{j=i+3}^{u-6} \sum_{k=j+3}^{u-3} t_i t_j t_k \cdots \tag{25}$$

まとめて和記号を書き直すと，

$$n_m = 1 + \sum_{j=1}^{k_m} (-1)^j \sum_{i_1=m+1}^{u-3j} \quad \sum_{i_2=i_1+3}^{u-3(j-1)} \cdots \sum_{i_j=i_{j-1}+3}^{u-3} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} \cdots t_{i_j}. \tag{26}$$

ただし和の数 k_m は，

$$k_m = \left[\frac{u-3-(m+1)}{3} \right] + 1 = \left[\frac{u-1-m}{3} \right]. \tag{27}$$

式 (26) で $m=0$ とすると，$n_0 = D$ となるので，(24) より $b_0 = 1$ である．さらに $B_0 = 1$ を保障するには $\mu_0 = 1$ としておけばよい．

結局碁石ゲームの破産確率は，

$$B_m = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m \frac{n_m}{D} \tag{28}$$

と書くことができ，n_m は式 (26) で，また D は，式 (22) に与えられている．

D と n_m の具体的な式を小さい数の u にたいして求めてみよう．

$u=6$ では，$k_D=1$．また $k_m = [(5-m)/3]$ なので $m=1, 2$ にたいして 1，$m=3, 4, 5$ にたいしてゼロとなる．したがって

$$D = 1 - \sum_{i=1}^{3} t_i = 1 - t_1 - t_2 - t_3, \tag{29}$$

$$n_1 = 1 - \sum_{i=2}^{3} t_i = 1 - t_2 - t_3, \quad n_2 = 1 - \sum_{i=3}^{3} t_i = 1 - t_3, \tag{30}$$

$$n_3 = n_4 = n_5 = 1. \tag{31}$$

つぎに $u=11$の場合について求めてみよう．項の数の増加を見ることができる．$k_D=3$，$k_m=[(10-m)/3]$ なので $m=1$ にたいして3，$m=2, 3, 4$ にたいし2，$m=5, 6, 7$ にたいし1，$m=8, 9, 10$にたいし 0 となる．

$$
\begin{aligned}
D-1 &= -\sum_{i=1}^{8} t_i + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+3}^{8} t_i t_j - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+3}^{5}\sum_{k=j+3}^{8} t_i t_j t_k \\
&= -t_1-t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8 \\
&\quad +t_1(t_4+t_5+t_6+t_7+t_8)+t_2(t_5+t_6+t_7+t_8) \\
&\qquad +t_3(t_6+t_7+t_8)+t_4(t_7+t_8)+t_5t_8 \\
&\quad -t_1(t_4t_7+t_4t_8+t_5t_8)-t_2t_5t_8,
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1-1 &= -\sum_{i=2}^{8} t_i + \sum_{i=2}^{5}\sum_{j=i+3}^{8} t_i t_j - \sum_{i=2}^{2}\sum_{j=i+3}^{5}\sum_{k=j+3}^{8} t_i t_j t_k \\
&= -t_2-t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8 \\
&\quad +t_2(t_5+t_6+t_7+t_8)+t_3(t_6+t_7+t_8)+t_4(t_7+t_8)+t_5t_8 \\
&\quad -t_2t_5t_8,
\end{aligned} \tag{33}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
n_2-1 &= -t_3-t_4-t_5-t_6-t_7-t_8+t_3(t_6+t_7+t_8) \\
&\quad +t_4(t_7+t_8)+t_5t_8,
\end{aligned} \tag{34}
$$

$$n_3-1= -t_4-t_5-t_6-t_7-t_8+t_4(t_7+t_8)+t_5t_8, \tag{35}$$

$$n_4-1= -t_5-t_6-t_7-t_8+t_5t_8, \tag{36}$$

$$n_5=1-t_6-t_7-t_8,\quad n_6=1-t_7-t_8,\quad n_7=1-t_8, \tag{37}$$

$$n_8=n_9=n_{10}=1. \tag{38}$$

3　漸化式と数値計算

3.1　漸化式

この節では，破産確率の数値計算を行う．ただし，前節で求めた式では，煩雑すぎるので数値計算には向かない．そこで式（24）の分子と分母部分についての漸化式を求めそれを利用することにする．まず分母の D をその u 依存性をはっきりと示すために $D(u)$ と書くことにする．するとつぎの漸化式が成り立つ，

$$D(u)=D(u-1)-t_{u-3}D(u-3),\quad u\geq 5. \tag{39}$$

例えば $u=6$ では，

$$D(6)=D(5)-t_3\,D(3),\quad D(3)=1. \tag{40}$$

これを直接しめそう．$D(6)$は，つぎのような５行５列の行列式で表される．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\mu_2 & 1 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\mu_3 & 1 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & -\mu_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_5 & 1 \end{vmatrix} \tag{41}$$

第５行に関して展開して，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ -\mu_2 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & -\mu_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_4 & 1 \end{vmatrix} -\mu_5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ -\mu_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_3 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & -\mu_4 & 0 \end{vmatrix} \tag{42}$$

最初の項は$D(5)$である．また第２項目については，４行目で展開し，つぎに得られた行列式の第３列目で展開する，つまり要素$-\mu_4$と$-\lambda_3$とで展開すると，

$$D(6)=D(5)-\lambda_3\mu_4\mu_5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\mu_2 & 1 \end{vmatrix} \tag{43}$$

最後の行列式は，$D(3)$ である．また $t_3=\lambda_3\mu_4\mu_5$なので (40) が得られる．

一般的な u にたいする (39) は，数学的帰納法で示す必要があるがここでは行わない．

行列式 (41) を見ると明らかなように，$D(2)=D(3)=1$，$D(4)=1-t_1$なので，漸化式 (39) を繰り返し用いると，$D(36)$ を計算することができる．

同様な漸化式が式 (24) の n_mについて成立する．u を明示して $n_m(u)$ と書くと，

$$n_m(u)=n_m(u-1)-t_{u-3}n_m(u-3),\quad 1\leq m\leq u-3. \tag{44}$$

そして$m=u-3$，$u-2$，$u-1$，に対しては，

$$n_m(u)=1. \tag{45}$$

ここで $n_m(j)=0\ (m\geq j)$ と理解しておく．

3.2　計算結果

図1に計算結果を示す．比較のために，最も簡単な$\lambda=\mu=0.5$ のゲームの場合(直線）を図示した．この場合，サイコロの目がヒットしたとき単位増加数（減少数）は1である．具体的な破産確率は[2],

$$B_m=1-m/36 \tag{46}$$

で与えられる．

また黒白どちらもサイコロの目がヒットしたとき単位増加数（減少数）が1である碁石ゲームでは，破産確率は，

$$r_m=\frac{\mu_m\mu_{m-1}\cdots\mu_1}{\lambda_m\lambda_{m-1}\cdots\lambda_1} \tag{47}$$

と定義して

$$B_m=\frac{\sum_{i=m}^{u-1}r_i}{\sum_{i=0}^{u-1}r_i}. \tag{48}$$

で与えられる[2]．ただし，λ_m，μ_mは (1) と (2) とで与えられている．このグラフも図に加えてある．

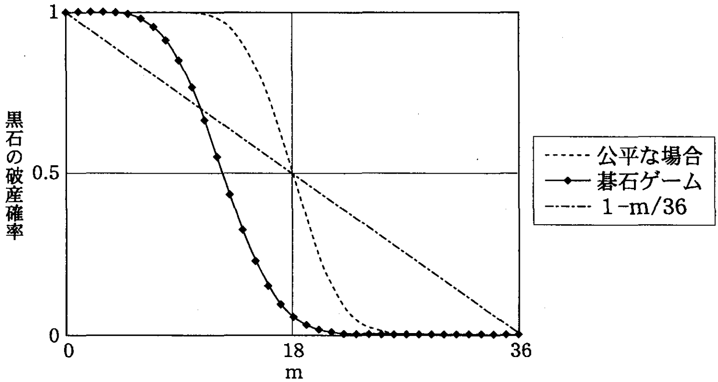

図１　黒石の破産確率B_m: ◆マークが碁石ゲーム (u=36) の場合で m が0から36までの点を示している.

4　ゲームの平均継続回数

ゲーム開始から終了までにかかる平均のトス回数を求める. それを（ゲームの）平均継続回数と呼ぶことにする. m から出発して平均継続回数をD_mとするとつぎが成り立つ [2] (第５節参照),

$$D_m = \lambda_m D_{m+2} + \mu_m D_{m-1} + 1。 \tag{49}$$

境界条件は, $D_0=0$, $D_u=0$.

前と同様に

$$D_m = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m d_m \tag{50}$$

と置くと,

$$d_m = \lambda_m \mu_{m+1} \mu_{m+2} d_{m+2} + d_{m-1} + \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m}, \quad 1 \le m \le u-1, \tag{51}$$

となる. 最後の項を r_m と置くと, これは

$$d_m = t_m d_{m+2} + d_{m-1} + r_m, \qquad 1 \le m \le u-1. \tag{52}$$

境界条件$D_0=0$は, $\mu_0=1$ と置くと

$$d_0=0\ . \tag{53}$$

また$d_u=0$としておいてよいから，

$$d_{u-1}=d_{u-2}+r_{u-1}, \tag{54}$$

$$d_{u-2}=d_{u-3}+r_{u-2}. \tag{55}$$

解を求めるために次のように仮定しよう，

$$d_m=c_0-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i c_i+\sum_{i=1}^{m} r_i, \qquad 0\leq m\leq u-1, \tag{56}$$

ここで，$c_i\,(0\leq i\leq u-3)$ はこれから定める．

式 (56) は，境界条件 (54) と (55) を満たす．実際

$$d_{u-1}=c_0+\sum_{i=1}^{u-1} r_i=d_{u-2}+r_{u-1}, \tag{57}$$

$$d_{u-2}=c_0+\sum_{i=1}^{u-2} r_i=d_{u-3}+r_{u-2}. \tag{58}$$

未定の係数を定めるために式 (56) を (52) に代入して，

$$c_m=d_{m+2} \tag{59}$$

$$=c_0-\sum_{i=m+3}^{u-3} t_i c_i+\sum_{i=1}^{m+2} r_i, \qquad 1\leq m\leq u-3, \tag{60}$$

3番目の項を新たな記号 s_{m+2} と書いて

$$c_m=c_0+s_{m+2}-\sum_{i=m+3}^{u-3} t_i c_i \tag{61}$$

となる．この式は第2節でのc_mと，和記号を含む3項目は同じである．したがって繰り返しc_mを代入すると

$$\begin{aligned} c_m=c_0\Bigl(1-\sum_{i=m+3}^{u-3} t_i+\sum_{i=m+3}^{u-6} t_i \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j-\sum_{i=m+3}^{u-9} t_i \sum_{j=i+3}^{u-6} t_i \sum_{k=j+3}^{u-3} t_k+\cdots\Bigr)& \\ +s_{m+2}-\sum_{i=m+3}^{u-3} t_i s_{i+2}+\sum_{i=m+3}^{u-6} t_i \sum_{j=i+3}^{u-3} t_j s_{j+2}& \\ -\sum_{i=m+3}^{u-9} t_i \sum_{j=i+3}^{u-6} t_j \sum_{k=j+3}^{u-3} t_k s_{k+2}+\cdots& \end{aligned} \tag{62}$$

ここで上の式の括弧内をc_m^0と書いて，2項目以降をe_mと書くことにすれば

$$c_m=c_0\, c_m^0+e_m \tag{63}$$

となる．

c_0 は境界条件 $d_0=0$ から決定できる．

$$d_0=c_0-\sum_{i=1}^{u-3} t_i c_i=0\ , \tag{64}$$

この式の c_i に (63) を代入すると

$$c_0\left(1-\sum_{i=1}^{u-3} t_i c_i^0\right)-\sum_{i=1}^{u-3} t_i e_i=0\ . \tag{65}$$

左辺の括弧の中は，第2節の D なので，結局

$$c_0=\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{u-3} t_i e_i\ . \tag{66}$$

これですべての c_m が決定できたので d_m は

$$d_m=c_0-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i(c_0 c_i^0+e_i)+s_m \tag{67}$$

$$=c_0\left(1-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i c_i^0\right)-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i e_i+s_m, \tag{68}$$

括弧の中は，第2節の n_m と一致する．さらに c_0 も置き換えると

$$d_m=\frac{n_m}{D}\sum_{i=1}^{u-3} t_i e_i-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i e_i+s_m \tag{69}$$

$$=b_m\sum_{i=1}^{u-3} t_i e_i-\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i e_i+s_m \tag{70}$$

となる．ただし b_m は第2節の式 (24) で与えられている．

結局平均継続回数は，

$$D_m=B_m\sum_{i=1}^{u-3} t_i e_i-v_m\sum_{i=m+1}^{u-3} t_i e_i+v_m s_m. \tag{71}$$

ただし$v_m=\mu_1\mu_2\cdots\mu_m$と定義した．また

$$e_m=s_{m+2}-\sum_{i=m+3}^{u-3} t_i s_{i+2}+\sum_{i=m+3}^{u-6} t_i\sum_{j=i+3}^{u-3} t_j s_{j+2}$$

$$-\sum_{i=m+3}^{u-9} t_i\sum_{j=i+3}^{u-6} t_j\sum_{k=j+3}^{u-3} t_k s_{k+2}+\cdots. \tag{72}$$

境界条件 $D_0=0$ は，$v_0=\mu_0=1$，$s_0=0$ としておけば満足する．

$u=6$ の場合の具体的な d_m を (70) を使って求めてみよう．

e_i の和の数は，第２節で求めた k_m^c だから $u=6$ とすると，$k_m^c=0$ である．よって

$$e_1=s_3,\ e_2=s_4,\ e_3=s_5. \tag{73}$$

この場合の b_m，すなわち n_m と D はすでに求めてある $D=1-t_1-t_2-t_3$，$n_1=1-t_2-t_3$ などである，

$$d_1=b_1\sum_{i=1}^{3}t_i s_{i+2}-\sum_{i=2}^{3}t_j s_{i+2}+s_1$$
$$=b_1(t_1s_3+t_2s_4+t_3s_5)-(t_2s_4+t_3s_5)+s_1, \tag{74}$$
$$d_2=b_2(t_1s_3+t_2s_4+t_3s_5)-t_3s_5+s_2, \tag{75}$$
$$d_3=b_3(t_1s_3+t_2s_4+t_3s_5)+s_3, \tag{76}$$
$$d_4=b_4(t_1s_3+t_2s_4+t_3s_5)+s_4, \tag{77}$$
$$d_5=b_5(t_1s_3+t_2s_4+t_3s_5)+s_5. \tag{78}$$

碁石ゲームの場合数値計算の結果を図に示す。黒白ともサイコロの目がヒットしたとき１だけ増加するゲームの場合との比較がしてある．

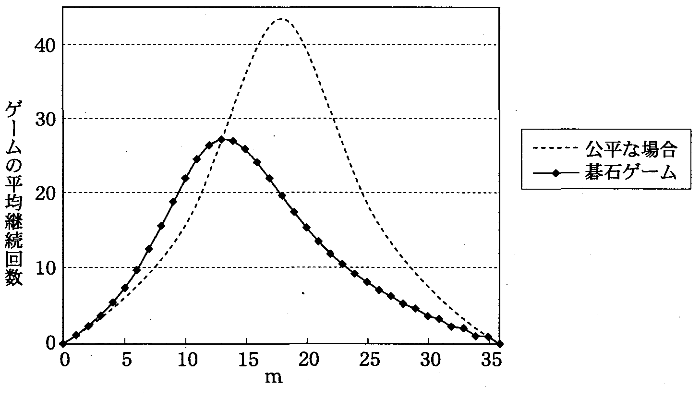

図２　ゲームの平均継続回数 D_m: 実線が碁石ゲームの場合．

また図には示していないが$\lambda_m=\mu_m=1/2$ のときは，よく知られているように[2],

$$D_m=m(u-m) \tag{79}$$

で与えられる．この最大値は，$m=u/2$で与えられるので，$u=36$では，ゲームの平均継続回数は最大で324回となる．

５．破産までの平均回数

前節では，黒石が負けるか勝つかどちらかでゲームが終了するまでの平均継続回数を計算した．この節では，最初m個の黒石から始めて黒石が破産するまで必要な平均トス回数を求める．そのためには，ちょうどn回で破産する確率$B_m(n)$を用いる．同時にちょうどn回で黒石が勝つ確率$W_m(n)$も議論する．

5.1　今まで用いた差分方程式の導出

準備のために，第２節，および第４節で用いた差分方程式を導いておく．

$B_m(n)$はつぎの差分方程式を満たす．mから出発した黒石の数は，最初に$m+2$か$m-1$に変化するから$1<m<u-2$と$0<n$にたいして，

$$B_m(n+1)=\lambda_m B_{m+2}(n)+\mu_m B_{m-1}(n). \tag{80}$$

同じ議論が$W_m(n)$にも成立する．

この方程式がちょうど$m=1$でも成立するように

$$B_0(n)=0 \qquad n\neq 0, \qquad B_0(0)=1. \tag{81}$$

とする．また$m\neq 0$にたいし$B_m(0)=0$なので式(80)は$0\leq n$で成立する．

同様に$m=u-2$で成立するためには，すべての$0\leq n$に対して$B_u(n)=0$であればよい．また$m=u-1$で成立するためには，すべての$0\leq n$に対して$B_{u+1}(n)=0$であればよい．以上の条件により，(80)は，$0\leq m\leq u-1$と$0\leq n$にたいして成立する．

第２節で議論したし$B_m(0\leq m\leq u)$は，$B_m(n)$をnについてすべて加えて得られるので，

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_m(n)=B_m. \tag{82}$$

これを使うと第２節で用いた差分方程式 (3) が式 (80) で両辺ともnについて加えると得られる．

また同様に，mから始めて黒石が勝つ確率は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_m(n)=W_m \tag{83}$$

である．ただし$W_u(0)=1$，$W_u(n)=0\,(n\neq 0)$である．またW_mは，

$$B_m+W_m=1 \tag{84}$$

を満たしている．

回数nでゲームが終了する確率F_mは，これら二つの確率の和になる，

$$F_m(n)=B_m(n)+W_m(n),\qquad 0<m<u。 \tag{85}$$

この両辺をnについて加えると(82)，(83)，(84)により，１となるのでF_mが確率変数nについての確率分布であることがわかる．一方破産確率のnについての確率分布は (82) により$B_m(n)/B_m$である．勝利確率$W_m(n)$についても同様である．

式 (85) にn倍して和をとると

$$\sum_{n=0}^{\infty} nF_m(n)=\sum_{n=0}^{\infty} n(B_m(n)+W_m(n)). \tag{86}$$

この左辺は，第４節のD_mなので，これは

$$D_m=d_m^0+d_m^u \tag{87}$$

となる．ただし，

$$d_m^0=\sum_{n=0}^{\infty} nB_m(n), \tag{88}$$

$$d_m^u=\sum_{n=0}^{\infty} nW_m(n). \tag{89}$$

最初黒石が m のとき破産および勝利までの平均のトス回数を，それぞれ，D^0_m，D^u_m とすると，

$$D^0_m = \frac{d^0_m}{B_m}, \quad D^u_m = \frac{d^u_m}{W_m}. \tag{90}$$

これらを使うと (87) は

$$D_m = D^0_m B_m + D^u_m W_m \tag{91}$$

と書くことができる．

d^0_m と d^u_m についての方程式を得るために，式 (80) に n 倍して和をとると

$$\sum_{n=0}^{\infty} nB_m(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(\lambda_m B_{m+2}(n) + \mu_m B_{m-1}(n)). \tag{92}$$

左辺は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} nB_m(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) B_m(n) \tag{93}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nB_m(n) - \sum_{n=1}^{\infty} B_m(n) \tag{94}$$

$$= d^0_m - B_m. \tag{95}$$

よって $1 \leq m \leq u-1$ に対して

$$d^0_m - B_m = \lambda_m d^0_{m+2} + \mu_m d^0_{m-1}. \tag{96}$$

同様の議論で

$$d^u_m - W_m = \lambda_m d^u_{m+2} + \mu_m d^u_{m-1} \tag{97}$$

が得られるから上式の両辺をそれぞれ加えると第4節のゲームの平均継続回数 D_m に対する差分方程式 (49) が得られる．

5.2　破産までの平均回数 D^0_m

破産までの平均トス回数は，式 (96) を解いて得られる．これは，D_m に対する解の中で $r_m = 1/v_m$ を $r_m = B_m/v_m$ に置き換えればよい．その数値計算の結果を図3に表示する．図には，目安として $D^0_m = m$ の直線を加えた．

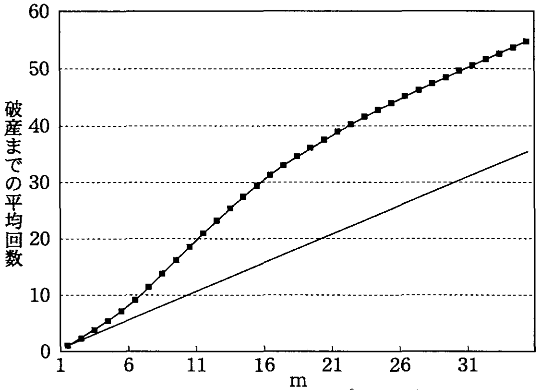

図3　黒石が破産するまでの平均トス回数D_m^0：実線は，目安のための m に比例する場合．

5.3　n 回目に破産する確率の確率分布

ここでは，破産確率の n についての確率分布 $B_m(n)/B_m$ を求める．それには，母関数を求めればよい．母関数を

$$G_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} B_m(n)\, s^n \tag{98}$$

で定義する．式 (80) の両辺に s^n をかけて加えると，

$$s^{-1} G_m(s) = \lambda_m G_{m+2} + \mu_m G_{m-1}(s). \tag{99}$$

境界条件は，

$$G_0(s) = 1, \quad G_u(s) = 0 \tag{100}$$

となる．

式 (99) は，第2節の B_m についての解でつぎの置き換えをすればよい，

$$\lambda_m \to s\lambda_m, \qquad \mu_m \to s\mu_m. \tag{101}$$

したがって，第2節で得た解 (29) の中で t_i を $s^3 t_i$ と置き換えればよい．t_i は，和記号が増加するごとに一つ増加するので，母関数の中に現れる s のべき乗は，ちょうど現れる和記号の3倍となる．よって D では $3k_D$ までのべき乗が現れる．例えば $u = 36$ では，$k_D = 11$ だからs^0， s^3， $s^6 \cdots$， s^{33}までとなる．また n_m では，k_m 回和記号が現れるので，$3k_m$ 乗まである．そのほか

にファクタ$\mu_1\mu_2\cdots\mu_m$からs^mがでるので一般的にG_mは

$$G_m(s)=s^m\ \frac{s\text{ についての }3k_m\text{ 乗までの多項式}}{s\text{ についての }3k_d\text{ 乗までの多項式}} \tag{102}$$

の形になっている.

例えば，$u=6$ に対して，母関数は,

$$G_1(s)=s\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{72}s^3}{1-\frac{5}{36}s^3}, \tag{103}$$

$$G_2(s)=s^2\frac{\frac{5}{9}-\frac{5}{324}s^3}{1-\frac{5}{36}s^3}, \tag{104}$$

$$G_3(s)=s^3\frac{\frac{5}{18}}{1-\frac{5}{36}s^3}, \tag{105}$$

$$G_4(s)=sG_3(s), \tag{106}$$

$$G_5(s)=s^2G_3(s). \tag{107}$$

求めるB_mは,

$$B_m(n)=\frac{D^{(n)}[G_m(s)]|_{s=0}}{n!}. \tag{108}$$

ただし，$D^{(n)}$はn回微分.

実際の計算は，$f_m(s)=G_m(s)/s^m$と置くと，$n=m+3i$，$i=0$，1，…にたいし,

$$B_m(n)=\frac{D^{(3i)}[f_m(s)]|_{s=0}}{(3i)!} \tag{109}$$

で求めることができる.

第4図には，例として$m=6$，13の場合の確率分布を示した．横軸は，$n=m+3i$ の i で表示してある.

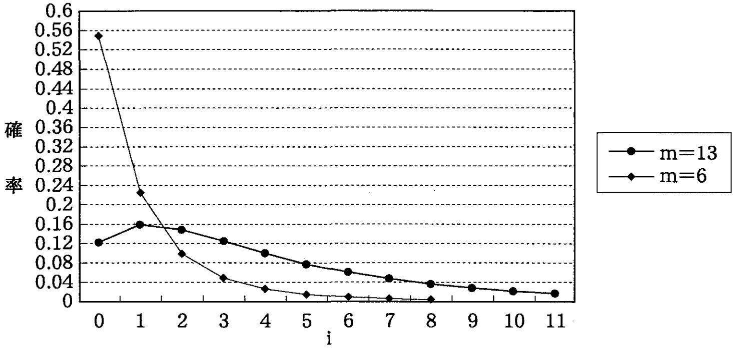

図4　破産確率の n についての確率分布 $B_m(n)/B_m$: 横軸 i は，$n=m+3i$ で定められている．

6　おわりに

この論文で求めた数値の結果は，厳密なものである．厳密であることを要求しなければ，コンピュータ上でシミュレーションをしたほうが手っ取りばやい。シミュレーションは，数行のプログラムで実行可能である．

$t\,(t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ ステップ目の盤上の黒石の数を表す確率変数を $N(t)$ とすると，$t+1$ 回目の状態は，

$$N(t+1)=N(t)+X,\quad \mathrm{t}=0,1,2,\cdots. \tag{110}$$

ただし，X は，黒石の数がn $(0<n)$ のとき n/u の確率で 2 となり，$1-n/u$ の確率でマイナス 1 となる確率変数である．$N(0)=m\,(0<m)$ から出発し，黒石の数がゼロまたは $u=36$ になれば終了となる．そのようなシミュレーションを行った結果と理論値との比較をつぎの図で示す．

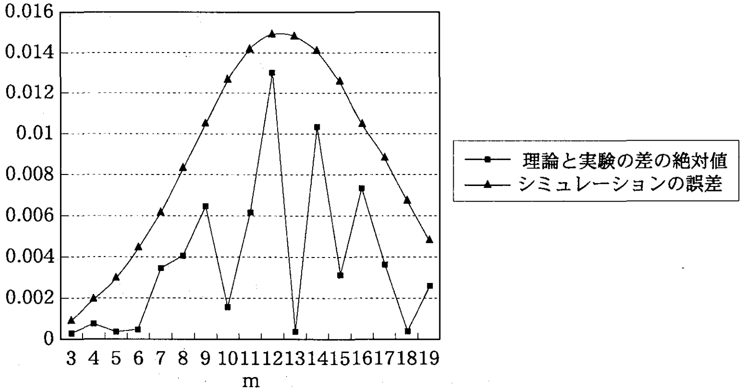

図5　シミュレーション（実験）結果と理論値の差の絶対値とシミュレーションの統計誤差との比較.

図で示してあるのは，1万回ゲームをシミュレートしたときの黒石の破産確率の統計誤差と，この確率のシミュレーション結果と理論値の差との比較である．理論値と実験値との差（の大きさ）がシミュレーションの統計誤差よりも小さいのが確認できる.

教室でこのゲームを学生に体験させるには，適切な m を選ぶ必要がある．最初から破産確率が0.5近辺で始めるとゲームの継続回数が長いのでなかなか決着がつかず学生は興味を失いがちとなる．むしろ，小さい $m=6$ 近辺から始めて大きい $m=18$ と比較したほうが興味をひきつける．最初小さい m では，黒石は比較的早く負けてしまう． $m=18$ くらいになると逆で黒白同じ数から出発しても今度はほとんど黒の負けがないことが確認できる.

教室では碁石を使うことができないので，赤などの色のついた紙を36個ちぎって用意してもらい，6×6の桝目は，罫線を引いた用紙を配布して行う．赤の紙片を，選択した m の数だけ最初適当な位置の桝目に置きゲームを開始する。二人でするゲームではなく一人で行い，サイコロのトスの結果は，教室全員同じ結果を使う．人数が多いクラスでは，負ける人の割合などをあらかじめ予言しておき結果と比較するなど統計的ことがらに注意をうながすことも可能となる.

碁石ゲームは，単純なゲームであるが，黒石を環境破壊因子のなんらかの量を表すとして，ある一定の量を超えると圧倒的に環境を変えてしまう様子を黒石の破産確率の図を使って類推することができることを付け加えておこう．

〈参考文献〉

[1] Goel, N.S.,Richter-Dyn, N., *Stochastic Models in Biology*, New York:Academic Press,1974, 寺本英，新田克巳，芦田廣　訳『生物学における確率過程の理論』産業図書、1978年.

[2] Feller, W., *An Introduction to Probability Theroy and Its Applications*, New York, John Wiley & Sons,1957, 河田龍夫監訳，卜部舜一，矢部真，池守昌幸，大平担，阿部俊一訳『確率論とその応用Ｉ　下』紀伊国屋書店、1960年.pp.432-444.