研究ノート

パティンキン・マクロモデルの安定性について

佐久間　敬

序

安定性の概念には大別すれば局所的安定性（local stability）と大域的安定性（global stability）がある。大域的安定性とは変数が初期値に関係なく時間がたつとともに均衡点のいずれかの一つに収束する場合をいい，局所的安定性とは変数の初期値がある均衡点に十分近いときのみ均衡点に収束する場合をいう[(1)]。

この小論の目的は，パティンキンのマクロモデルの局所的安定性を完全雇用の仮定のもとで吟味することである。

注　(1)　この定義の説明は根岸〔2〕pp.123—124による。

Ⅰ　パティンキン・マクロモデル

パティンキンの基本的マクロモデルでは次のような仮定がなされている[(1)]。

(1)　経済主体は家計，企業および政府からなり，それらの経済行動は次のように規定されている。

家計：家計は生産用役を企業に提供することにより収入を得る。その収入でもって租税を支払い，消費財を購入する。残りは債券および現金の保有に当てられる。

企業：企業は消費財を家計と政府に，債券を家計に販売する。その売上げは，賃金・利子の支払い，消費財の購入，発行した債券の償還，現金残高の追加に当てられる。

政府：政府は家計より租税を受け取り，その全額を消費財の購入に当てる。そして，その消費財は経済に無償で提供される。政府は債券および現金を保有しない。

(2) 貨幣錯覚は存在しない。

(3) 価格の予想弾力性は1である。

(4) 分配効果は存在しない。

(5) 価格および賃金は伸縮的である。

労働，商品，債券および貨幣に対する総需要関数および総供給関数は次のようにあらわされる(2)。労働に対する総需要量 N^d は

$$N^d = Q\left(\frac{w}{p}\right),\quad \frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{w}{p}\right)} < 0$$

であり，総供給量 N^s は

$$N^s = R\left(\frac{w}{p}\right),\quad \frac{\partial R}{\partial\left(\frac{w}{p}\right)} > 0$$

である。ただし w は貨幣賃金率，p は商品の価格水準である。

商品に対する総需要は，家計による消費支出と企業による投資支出，それに政府支出の合計である。消費財に対する実質需要量 C は

$$C = g\left(Y_0,\quad r,\quad \frac{M_0{}^H}{p}\right)$$

で，投資財に対する実質需要量 I は

$$I = h\left(Y_0,\quad r,\quad \frac{M_0{}^F}{p}\right)$$

で，そして一定額の政府支出 G は

$$G = G_0$$

で表わされるので，総需要関数は

$$F\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0}{p}\right)\equiv g\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{H}}}{p}\right)+h\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{F}}}{p}\right)+G_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}<0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}>0$$

である。ただし r は利子率，M_0 は総貨幣量，$M_0{}^{\mathrm{H}}$ は家計の初期名目貨幣保有量，$M_0{}^{\mathrm{F}}$ は企業の初期名目貨幣保有量，G_0 は定数である。商品に対する総供給関数は，完全雇用の仮定から

$$Y=Y_0$$

で示される。ここで Y_0 は定数である。

債券に対する実質需要量は

$$\frac{B^{\mathrm{d}}}{r\,p}=H\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{H}}}{p}\right)$$

であり，実質供給量は

$$\frac{B^{\mathrm{s}}}{r\,p}=J\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{F}}}{p}\right)$$

である。したがって債券に対する実質超過需要関数は

$$B\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0}{p}\right)\equiv H\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{H}}}{p}\right)-J\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0{}^{\mathrm{F}}}{p}\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial r}>0\,,\quad \frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}>0$$

である。

貨幣に対する名目需要量 M^{d} は

$$M^{\mathrm{d}}=p\cdot L\left(Y_0,\quad r\,,\ \frac{M_0}{p}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}<0\,,\quad 1>\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}>0$$

で示され，貨幣の名目供給量は一定と仮定されているので

$$M^{\mathrm{s}}=M_0$$

である。ここで M_0 は定数である。

以上より労働，商品，債券および貨幣市場における均衡条件は次の通りである。

$$Q\left(\frac{w}{p}\right)=R\left(\frac{w}{p}\right) \qquad \text{労働市場}$$

$$F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{r}\right)=Y_0 \qquad \text{商品市場}$$

$$B\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)=0 \qquad \text{債券市場}$$

$$p\cdot L\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)=M_0 \qquad \text{貨幣市場}$$

注 (1) Patinkin〔3〕pp.199～202，邦訳書 pp.185～188を参照。

(2) Patinkin〔3〕pp.202～227，邦訳書 pp.188～210を参照。

Ⅱ 安定分析

パティキン・モデルの動学分析はワルラスの法則により3市場について検討すればよい。単純化のために，労働市場の均衡状態が攪乱されずに維持されると仮定すれば2市場（ここでは商品市場と債券市場）に限定しうる[1]。

利子率の時間的変化率は証券の需要と供給の差に反比例し，価格水準の時間的変化率は商品の需要と供給の差に正比例すると仮定する。このことは次のような微分方程式で示される[2]。

$$\frac{dr}{dt}=-k_1B\left(Y_0,\ r,\ \frac{H_0}{p}\right)$$
$$\frac{dp}{dt}=k_2\left[F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)-Y_0\right] \qquad (2\cdot1)$$

ここでk_1，k_2は正の常数である。（2・1）式を均衡点（p_0，r_0）の近傍でテーラー展開し，2次以上の項を無視すれば

$$\frac{dr}{dt}=-k_1\left[(r-r_0)\frac{\partial B}{\partial r}-(p-p_0)\frac{M_0}{p_0{}^2}\ \frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}\right] \qquad (2\cdot2)$$

$$\frac{dp}{dt}=k_2\left[(r-r_0)\frac{\partial F}{\partial r}-(p-p_0)\frac{M_0}{p_0{}^2}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}\right]$$

となる。ここで $\frac{\partial B}{\partial r}=a$, $\frac{\partial F}{\partial r}=b$, $\frac{M_0}{p_0{}^2}\frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}=-c$, $\frac{M_0}{p_0{}^2}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}=-d$ とすれば，（2・2）式は

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}&=-k_1[(r-r_0)a+(p-p_0)c]\\ \frac{dp}{dt}&=k_2[(r-r_0)b+(p-p_0)d]\end{aligned}\qquad(2\cdot3)$$

となる。（2・3）式の固有方程式は

$$\begin{vmatrix}-k_1a-x & -k_1c\\ k_2 & k_2d-x\end{vmatrix}=0$$

である。これは

$$x^2+(k_1a-k_2d)x+k_1k_2bc-k_1k_2ad=0$$

である。

体系が局所的安定であるためには，固有方程式のすべての根の実部が負でなければならない。そのための必要十分条件は

$$k_1a-k_2d>0$$

$$k_1k_2bc-k_1k_2ad>0$$

となることである(3)。 $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d<0$ から上記の条件は満たされ，体系は安定である。

注 (1) Patinkin〔3〕p.230，邦訳書 p.212 を参照。
(2) Patinkin〔3〕p.260，邦訳書 p.240 を参照。
(3) この条件は「ルース＝フルビッツの条件」と呼ばれている。この証明は Samuelson〔4〕pp.430～431，邦訳書 pp.447～448を参照。

Ⅲ　解の動学径路

（2・1）式を満たす（p, r）の動学径路を調べてみよう。商品市場の均衡条件

$$F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)=Y_0$$

を満たす利子率と価格水準の値の軌跡をＣＣ曲線とする[1]。いま

$$E\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)=F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)-Y_0 \qquad (2\cdot4)$$

として，（2・4）式の全微分を求めれば

$$\frac{\partial E}{\partial r}dr+\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}d\left(\frac{M_0}{p}\right)=0$$

となる。これより

$$\frac{dr}{dp}=\left(\frac{M_0}{p^2}\right)\frac{\dfrac{\partial E}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}}{\dfrac{\partial E}{\partial r}}$$

となる。

$$\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}=\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}>0$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{\partial F}{\partial r}<0$$

であるから

$$\frac{dr}{dp}<0$$

となり，ＣＣ曲線は第３図のような右下りの曲線であ。

債券市場の均衡条件

$$B\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)=0 \qquad (2\cdot5)$$

を満たす利子率と価格水準の値の軌跡をＢＢ曲線とする[2]。（2・5）式を全

微分すれば

$$\frac{\partial B}{\partial r}dr+\frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}d\left(\frac{M_0}{p}\right)=0$$

となる。これより

$$\frac{dr}{dp}=\left(\frac{M_0}{p^2}\right)\frac{\frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}}{\frac{\partial B}{\partial r}}$$

となる。$\frac{\partial B}{\partial\left(\frac{M_0}{p}\right)}>0$，$\frac{\partial B}{\partial r}>0$ より

$$\frac{dr}{dp}>0$$

となり，ＢＢ曲線は第３図のような右上りの曲線である。

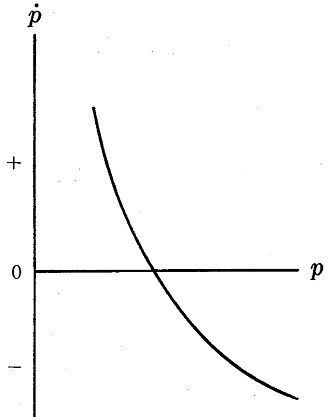
ＣＣ曲線とＢＢ曲線による４個の領域における p および r の変化の方向を調べてみよう。まず p の変化の方向から始める。$\frac{dp}{dt}$ を $\dot{p}$ であらわせば

$$\dot{p}=k_2\left[F\left(Y_0,\ r,\ \frac{M_0}{p}\right)-Y_0\right]$$

であり，この式を p で微分すれば

$$\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}=k_2\frac{\partial F}{\partial p}$$

となる。$\frac{\partial F}{\partial p}<0$ から $\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}<0$ となり，ＣＣ曲線の上方の領域では $\dot{p}$ は負，下方の領域では $\dot{p}$ は正である（第１図参照）[3]。



第1図

次に r の変化の方向について考えてみよう。$\frac{dr}{dt}$ を $\dot{r}$ とすれば

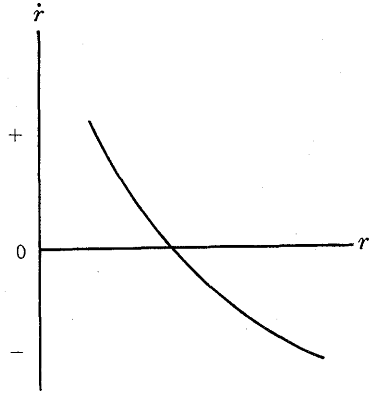
$$\dot{r} = -k_1 B\left(Y_0,\quad r,\ \frac{M_0}{p}\right)$$

であり，この式を r で微分すれば

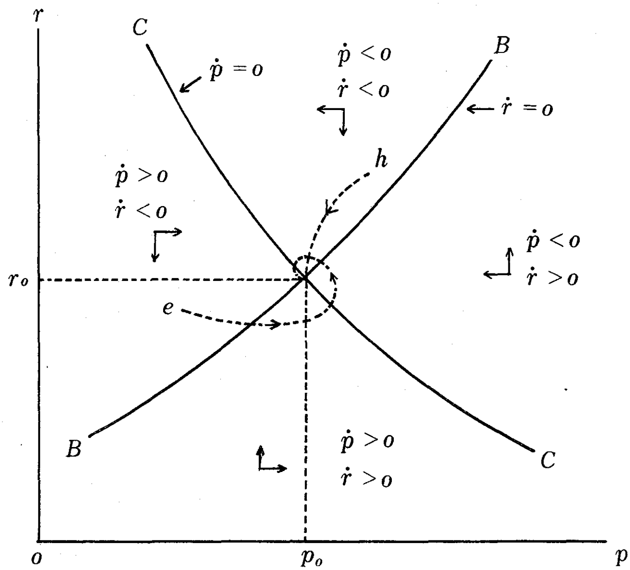
$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = -k_1 \frac{\partial B}{\partial r}$$

となる。$\frac{\partial B}{\partial r} > 0$ から $\frac{\partial \dot{r}}{\partial r} < 0$ となり，ＢＢ曲線の上方の領域では $\dot{r}$ は負であり，下方の領域では $\dot{r}$ は正である（第２図参照）。

以上より，p および r の変化の方向を矢印で示せば第３図のようになる。かくて（p，r）の動学径路は，点 e あるいは h で始まる径路のようにＣＣ曲線とＢＢ曲線の交点に近ずくように描かれる[4]。



第2図



第3図

注 (1) Patinkin〔3〕p.232，邦訳書 p.215 を参照。

(2) Patinkin〔3〕p.233，邦訳書 p.216 を参照。

(3) この図は佐藤〔5〕p.82 を参考にした。

(4) Fatinkin〔3〕p.233，邦訳書 p.215 を参照。

参考文献

〔1〕 岩根達雄他「パティンキンの完全雇用モデル(1)」『経済学論叢』(同志社大学) 18巻5・6号.

〔2〕 根岸 隆『価格と配分の理論』東洋経済, 1965.

〔3〕 Patinkin, D., *Money, Interes and Prices* (2nd edition), Harper & Rowe, 1965. 〔貞木展生訳『貨幣・利子および価格』勁草書房, 1971〕.

〔4〕 Samuelson, P.A., *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass., 1947. 〔佐藤隆三訳『経済分析の基礎』勁草書房, 1967〕.

〔5〕 佐藤隆三『経済成長の理論』勁草書房, 1968.