

地域経済への政府支出効果の遅れの計測について

若 井 具 宜

I 序

地域経済の活性化のため、関係地方自治体を中心として、企業の誘致や地場産業の振興など直接的なものから、産業基盤や社会基盤の整備など間接的なものまで、さまざまな行政的措置がとられている。それらは政府支出（国、地方を含む）として、財政の側面から捕えることができる。また、そうした諸施策の結果としての地域経済の水準を示す指標も、各種統計調査資料などから、ある程度まで把握することができる。

しかしながら、そのような政府支出と行政のレベル（地域経済の活動水準など）を特定の因果関係として定式化する際には、若干の問題がある。それはおおむね以下の2点に要約できる。

1) 指標特定化の困難性

地域経済社会の変貌に伴なって、住民の価値観も変化し、行政に対するニーズも多様化してきた。また、行政施策もそれに呼応すべく一層複雑多岐にわたるようになる一方、施策の手段自体も高度化、多様化してきた。このため、特定の施策に対する効果が多方面の行政のレベルに及ぶ反面、特定の行政のレベルにも複数の施策の効果が錯綜しながら波及することも十分考えられる。したがって、因果関係にある指標の特定化はかなりの困難を伴う。また、行政のレベルを表わす指標自体かなりの拡充、整備が必要とされている。¹⁾

1) このような地域の経済、社会指標を広範にかつ総合的に捕えようとする試みは、総理府統計局の「社会生活統計指標」などにみられ、その体系化が進められている。総理府統計局編『社会生活統計指標』日本統計協会、1980年、481—506ページ参照。

また、社会資本の整備状況などについては、毎年、自治省が「公共施設状況調

2) 政府支出効果の遅れ

経済諸現象においては、しばしば、原因現象が生起してから結果現象が完了するまでの間に一定の時間を要する場合がある。さまざまな制度的、機構的経過を必要とする政府支出の場合は、ことさらこの傾向が強いと考えられる。マズグレイブは、予算政策の変更が産出量の水準に効果をもたらすまでに、調整の時間的経過が必要とされるとしている²⁾。また、地方財政の場合は、中央政府の財政に依存する部分がかかなりあるため、こうしたタイムラグの効果が一層複雑になると考えられる。

主として以上の 2 つの問題のため、政府支出が地域経済に及ぼす効果を計測する場合、かなりの困難を伴う。第 1 の問題については、地域統計の充実や指標の算出など、データの整備に待つところが大きく、この方面の理論、実務

」などで、市町村レベルまでの個々具体的な指標算出を行なっている。第 1 表にはそのうち道路行政に関するものの一部を掲げたが、これらを財政支出の効果の指標として利用するには、何らかの総合化つまり評価の問題を解決しなければならない。地方財政調査研究会編、「新訂財政分析」、ぎょうせい、1981年 144—157ページ参照。

第 1 表 道路行政指標

| 項 目 | 算 式 |
|---------------|---|
| 道 路 延 長 比 率 | $\frac{\text{道路実延長}(m)}{\text{行政区域面積}(km^2)}$ |
| 道 路 面 積 比 率 | $\frac{\text{道路面積}(m^2)}{\text{行政区域面積}(km^2)}$ |
| 幅 員(m) | $\frac{\text{道路面積}(m^2)}{\text{道路実延長}(m)}$ |
| 改 良 率 (%) | $\frac{\text{改良済延長}(m)}{\text{実延長}(m)} \times 100$ |
| 舗 装 率 (%) | $\frac{\text{舗装済延長}(m)}{\text{実延長}(m)} \times 100$ |
| 自動車交通不能道比率(%) | $\frac{\text{自動車交通不能道延長}(m)}{\text{実延長}(m)} \times 100$ |

2) R. A. Musgrave; *The Theory of Public Finance*, Mcgraw-Hill 1959, 木下和夫監修, 大阪大学財政研究会訳『財政理論』, 有斐閣, 1962年, 308—316, 754—757ページ参照。

両面からの根気強いアプローチが望まれる。一方、第2の問題については、すでに、財政学、計量経済学の分野において、それぞれ理論的、実証的研究が進められてきたが³⁾、以下では、こうした政府支出効果の遅れについて、そのモデル化と統計的推定の問題を整理してゆく。

II 政府支出効果の遅れのモデル化

いま、 t 期の説明変数を X_t 、 t 期と $(t-1)$ 期の結果変数をそれぞれ Y_t 、 Y_{t-1} と表わすことにしよう。 Y_{t-1} がいわゆる遅れのある変数(lagged variable)である。そこで、これらの変数間に

$$Y_t = f(X_t, Y_{t-1}) \dots \dots \dots (1)$$

なる関係を想定することができる。ここで、変数 X を政府支出(財政支出)、 Y をその効果としての行政のレベル(地域経済の水準を表わす指標)と考えれば、前期の行政のレベルが当期の行政のレベルに影響を与えるモデルとなっている。

一般に、経済現象において、原因と結果の間の反応に遅れが生じる要因としては、次の3種類のもので考えられる。

① 技術的要因；財の生産プロセスなどで生じるもの。例えば、研究開発投資が行なわれてから、実際に工場での生産力が上昇するまでには、幾段階かのラグが生じる⁴⁾。

3) 計量経済学の分野での研究については本論II以下に示すとおりであるが、財政学の実証的な分野での研究には例えば次のようなものがある。

① 消費関数の推定(財政政策の準マクロ的効果の計測)。
能勢哲也『財政の計量分析』創文社、1982年、181—224ページ参照。

② 中央政府消費関数(歳出モデル)の推定。
市川洋、林英樹『財政の計量経済学』勁草書房、1973年、123—125ページ参照。

4) Griliches は3段階に区分している。第1段階は資金が投入されてから発明が実現するまで、第2段階は発明されたアイデアや工夫が商業ベースに乗るまで、第3段階はそれらが古いものにとって代わるまでの、いわゆる普及のプロセスである。

Griliches, Z; "Distributed Lags; Survey", *Econometrica*, 35(1), 1967参照。

② 制度的要因；法的，制度的な理由によって，手続面などで生じるもの。例えば，経済政策などが各種の行政機関を経て効果を発揮するまでにラグが生じる。

③ 心理的要因；個人または法人などの経済主体に生じる心理的な反応の遅れ。例えば，習慣 (habit)，慣習 (custom)，慣性 (inertia) および市場に対する不完全な知識などによって対応が遅れることが多い。

現実には，これらの要因の複合した作用と考えることができるが⁵⁾，財政支出の場合は上の②及び③，とりわけ制度的要因が大きいとみられる。

ところで，このような反応の遅れを伴う関係は，いわゆる分布ラグ (distributed lags) の問題として，計量経済学の分野などで議論されてきたが，経済学的意味合いをもつ一般的モデルとしては，次の4つのタイプをあげることができる。すなわち，①適用期待型 (adaptive expectations model)，②部分調整型 (partial adjustment model)，③動的需要型 (dynamic demand model)，④幾何的減少型 (geometrically declining model) であり，それぞれ以下の特性をもっている。

1) 適用期待型

いま，予想価格 (P^*) の変化が，その前期の実現価格 (P) と予想価格の差に比例するような形で決定されるものと想定すれば，次のような定式化ができる。

$$P^*_{t+1} - P^*_t = \beta (P_t - P^*_t) \dots\dots\dots(2)$$

ただし， $0 < \beta < 1$ である。この形を適用期待型といい，これは P. Cagan の提案によるものである⁶⁾。(2)式を解けば

5) この3区分は Gupta に従った。

Gupta, Y. P.; *Statistical Estimation of Linear Economic Relationships*, Rotterdam University Press, 1971 参照。

6) Cagan の原形では，

$$\left(\frac{d \pi^*}{d t} \right)_t = \beta (\pi_t - \pi^*_t)$$

となっている。

Cagan, P.; "The Monetary Dynamics of Hyper Inflation", in Fried-

$$P_{t+1}^* = \beta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\beta)^i P_{t-i} \dots\dots\dots(2)'$$

となり、予想価格がそれ以前の実現価格のある意味での加重平均になっていることがわかる。

2) 部分調整型

経済変数 Y_t の望まれる（あるいは最適な）水準 Y_t^* を、他の経済変数 X_t の関数として、

$$Y_t^* = \alpha X_t \dots\dots\dots(3)$$

と表現できる想定する。ただし、 α は定数である。いま、 Y_t^* を t 期におけるある地域産業の望まれる労働雇用量とする。もし、 $(t-1)$ 期において、望まれる労働雇用量 Y_{t-1}^* と実現した労働雇用量 Y_{t-1} とのギャップが大きいとき、この差を埋める調整は即時的には完了しない。なぜなら、企業の対応や政府によってとられる諸施策が実を結ぶまでの制度的、時間的プロセスが存在するからである（とりわけ、地域産業の場合は、他地域（全国）の動向などにも微妙に左右されるため、調整の効果が現われるまでのプロセスは複雑である）。したがって、単位期間内において、望まれる雇用量への調整は部分的のみ達成されると考えるのが妥当であり、これを定式化すると、

$$Y_t - Y_{t-1} = r (Y_t^* - Y_{t-1}) \dots\dots\dots(4)$$

となる⁷⁾。ただし、 $0 < r < 1$ である。

また、(3)式及び(4)式から、

$$Y_t = (1-r) Y_{t-1} + \alpha r X_t \dots\dots\dots(5)$$

となり、実現値のみの関係が導かれる。

3) 動的需要型

man, ed, *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press, Chicago, 1956 参照。

7) 原形は M. Nerlove の提案したものである。Dhrymes, P. J; *Distributed Lags; Problems of Estimation and Formulation*, Holden-day, Inc, San Francisco, 1971 などを参照。

いま, t 期の需要関数を

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 \ell_t \dots\dots\dots(6)$$

と表わすことにしよう。ここで, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ はそれぞれ定数で, X_t はある財に対する需要量, Y_t は実質所得の水準を示すものとする。さらに, ℓ は

$$\ell_t - \ell_{t-1} = \beta_0 \ell_{t-1} + \beta_1 X_t \dots\dots\dots(7)$$

なる関係をもつ観測不可能な変数で習慣継続現象を表わすものとする。これは, ℓ の変化が, ℓ の大きさに比例する消散成分 $\beta_0 \ell_{t-1}$ と現行消費量に比例する増大成分 $\beta_1 x_t$ の和となることを意味している⁸⁾。ただし, β_0, β_1 は定数である。(7)式より ℓ_t を解き, (6)式に代入すれば, X_t, Y_t に関する式が得られ, 実測可能となる。

4) 幾何的減少型

上に示した三つの型は, いずれも, 観測不可能な変数を用いて行動様式を表わし, それを観測可能な変数と入れかえる結果, 分析可能となるものである。これに対して, 当初から観測可能な変数のみを用いて, 経済的反応の遅れを直接表現したのが L. M. koyck の提案による幾何的減少型で, 次のように定式化される⁹⁾。

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha (X_t + \beta X_{t-1} + \beta^2 X_{t-2} + \dots) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i X_{t-i} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここで, X, Y は経済変量であり, α, β は定数で, $0 < \beta < 1$ の制約付きである。このモデルは, 原因現象 X の結果現象 Y に及ぼす効果が, 過去にさかのぼるほど幾何的に減少してゆくことを示している。(8)式からただちに

$$Y_t = \alpha X_t + \beta Y_{t-1} \dots\dots\dots(9)$$

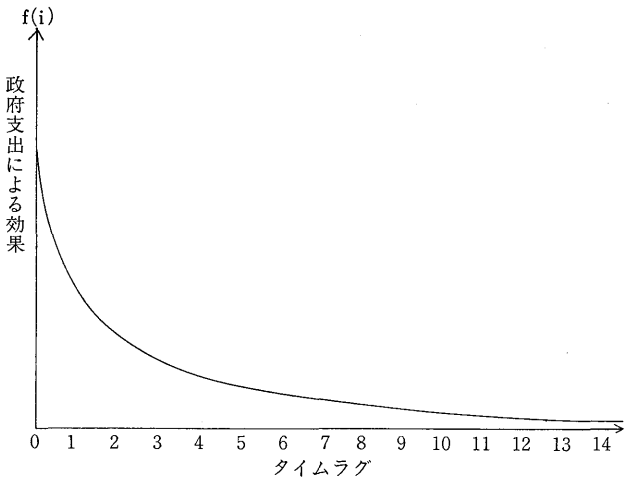
を得ることができる¹⁰⁾。

8) これは, H. S. Houthakker と L. D. Taylor の提案によるものである。Dhrymes, 前掲などを参照。

9) Koyck, L. M; *Distributed Lags and Investment Analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1954参照。

10) この手続きを reduction Procedure と呼んでいる。

以上述べた4つのタイプの遅れを伴う経済モデルはそれぞれ異なった着想から定式化されたものであるが、パラメーター（係数）の読みかえを行なうことによって、最終的には(8)式ないし(9)式の形に誘導することができる。また財政支出効果の遅れのタイプは、上の①適用期待型、②部分調整型、③動的需要型など実測不可能な変量を用いたモデルとしても直接、間接の適用可能性をもっているが、以下の議論では、実測可能な変量のみから形成されている幾何的減少型を中心的に取り上げる。その理由は、④幾何的減少型の反応の出現分布が、第1図に示すように、経済的效果ないし政府支出効果の遅れの現実に比較

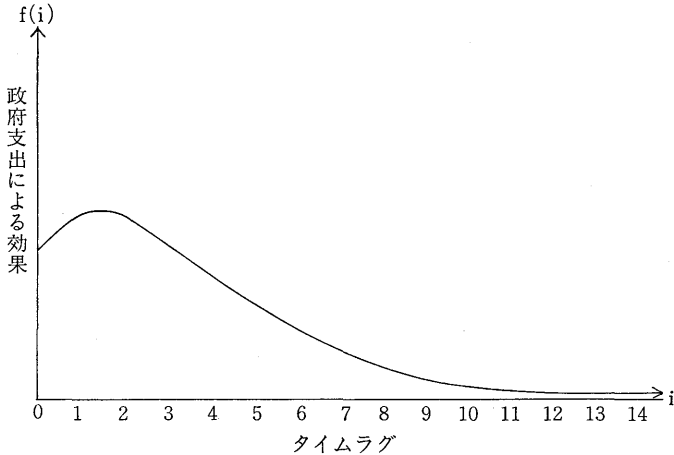


第1図 幾何的減少型

的よく妥当していること、⑤上に述べたように、代表的なモデル(①～③)がいずれも実測可能な形としておおむね幾何的減少型に誘導されうること、⑥以下の推定のモデルとして簡単な形をしており都合がよいことなどである¹¹⁾。

11) 財政支出のモデルとしては、第2図に示すようなパスカル分布型の方がより適合する場合があるかもしれない。なぜなら、財政支出がなされてから、その効果がピークに達するまでに若干のタイムラグを伴う可能性もあるからである。しかし、幾何的減少型と比較するとパラメーターがひとつ多く、モデルがやや複雑化する難点がある。

Solow, R.M; "On a Family of Lag Distributions", *Econometrica*, 28(2), 1960参照。



第 2 図 パスカ分布型

III 政府支出効果の遅れの推定

(8)式ないし、(9)式の形に特定化された政府支出効果の遅れのモデルを、実際に統計的に推定するためには、(8)式および(9)式に示される、いわゆるシステムティックな部分のみでなく攪乱項を付加した形で考えなければならない。

つまり、

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i X_{t-i} + u_t \dots\dots\dots(10)$$

ないし、

$$Y_t = \alpha X_t + \beta Y_{t-1} + w_t \dots\dots\dots(11)$$

となる。ここで、 $w_t = u_t - \beta u_{t-1}$ であり、 w_t はいわゆる合成攪乱項 (composite disturbance) である。また、 $0 < \beta < 1$ がこの体系の安定条件として要求されている。また、統計的推定のために、次の諸仮定をおくこととする。

〔仮定 1〕 X_t 及び Y_{t-1} は T 個の時系列観測値からなり、測定誤差はないものとする¹²⁾。

12) (11)式において、変数 Y_t 、 X_t 、 Y_{t-1} が原データそのままの変量であるのかそれとも原データの平均から測った偏差形の変量であるのかが問題となる。これ

らの変数が、それぞれ、平均からの偏差で測られていると仮定すれば、(1)式の Y_t および Y_{t-1} の系列は、

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 - \bar{y}_t \\ y_3 - \bar{y}_t \\ \vdots \\ y_T - \bar{y}_t \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_t = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T y_t$$

$$Y_{t-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{T-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y}_{t-1} \\ y_2 - \bar{y}_{t-1} \\ \dots \\ y_{T-1} - \bar{y}_{t-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_{t-1} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} y_t$$

となる。ここで、 $\{y_t; t=1, 2, \dots, T\}$ は原データの系列である。一般に $\bar{y}_t \neq \bar{y}_{t-1}$ であるから Y_t と Y_{t-1} の要素は1期遅れの対応関係を失っており、(1)式は定差モデルとしての意味をもたないことになる。また、仮に、

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 - \bar{y} \\ y_3 - \bar{y} \\ \dots \\ y_T - \bar{y} \end{pmatrix}, \quad Y_{t-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{T-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_{T-1} - \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$$

として、 y_t と y_{t-1} の要素を対応させるとすれば、

$$\sum_{t=2}^T Y_t \approx 0, \quad \sum_{t=1}^{T-1} Y_t \approx 0$$

となり、偏差形での推定が不可能になる。

一方、(1)式の諸変数が偏差形ではなく、原データを使っているとすると、定数項を除外するのは一般性を失うことになる。しかしこうした問題は、推定量の特性を議論する際には、さほどの重要性をもたないと思われるので、以下の議論ではデータの問題を保留して一応(1)式を用いることにする。その理由は、①以下では主として推定量の大標本特性を問題にし、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{y}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{y}_{t-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{y}$$

であることと、②演算上の便宜があることである。

〔仮定2〕 変数 X_t は非確率的で、反復標本において固定された数とする。

〔仮定3〕 攪乱項 u_t は観測不可能な確率変数であり、あらゆる時点で

$$E(u_t) = 0, E(u_t^2) = \sigma_u^2 \text{ (有限) とする。}$$

〔仮定4〕 u_t は1階のマルコフ過程

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t, |\rho| < 1$$

に従う。ここで ρ は自己回帰パラメーター、 e_t は

$$E(e_t) = 0, E(e_t e_{t'}) = \delta_{tt'} \sigma^2$$

なる確率変数であり、 $\delta_{tt'}$ はクロネッカーの δ (delta) である。

ところで、(11)式に示した幾何的減少型モデルは、攪乱項の差異によって次の3種類に区分できる。

a) **koyck** のモデル

これは(11)式のモデルそのものであるが、比較のため書き改めると、

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha X_t + \beta Y_{t-1} + u_t - \beta u_{t-1} \dots (11') \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t, |\rho| < 1 \end{aligned}$$

となる。これを **koyck** のモデルと呼ぶことにする。

b) **Griliches** のモデル

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha X_t + \beta Y_{t-1} + u_t \dots \dots \dots (12) \\ u_t &= \rho u_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

Griliches は攪乱項を上のように簡素化しており、上で述べた部分調整型がそのままこのタイプである。これを **Griliches** のモデルと呼ぶことにする¹³⁾。

c) **Dhrymes** のモデル

$$Y_t = \alpha X_t + \beta Y_{t-1} + e_t - \beta e_{t-1} \dots \dots \dots (13)$$

または

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i X_{t-i} + e_t \dots \dots \dots (13')$$

13) **Griliches**, 前掲参照。

koyck のモデルの u_t の代わりに e_t を直接モデル化している。これを Dhrymes のモデルと呼ぶことにする¹⁴⁾。

以上の3種類のモデルは、推定量の特性を吟味する上でそれぞれ異った利点をもっているが、本論では、これらを一般化した形で扱ってゆきたい。すなわち、

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \alpha X_t + \beta Y_{t-1} + w_t \\
 w_t &= u_t - \lambda u_{t-1} \dots\dots\dots(14) \\
 u_t &= \rho u_{t-1} + e_t
 \end{aligned}$$

として展開することにする。つまり、

- a) $\lambda = \beta$ ならば、(11)'式のkoyckのモデル、
- b) $\lambda = 0$ ならば、(12)式のGrilichesのモデル、
- c) $\lambda = \beta, \rho = 0$ ならば、(13)式のDhrymesのモデルになっている。

まず、(14)式の攪乱項の統計的特性について検討してみよう。仮定4から、

$$u_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \dots\dots\dots(15)$$

となり、したがって、無限系列に対して

$$E(u_t) = 0, \quad \sigma_u^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho} \dots\dots\dots(16)$$

となる。さらに、異なる2時点 t および $t - k$ に対して、

$$E(u_t u_{t-k}) = \rho^k \sigma_u^2, \quad k = 1, 2 \dots\dots\dots(17)$$

が成立する。これより、 u_t の1階の自己相関係数は、

$$\frac{\text{cov}(u_t, u_{t-1})}{\text{var}(u_t)} = \rho \dots\dots\dots(18)$$

となる。一方、合成攪乱項 w_t については、

$$\begin{aligned}
 E(w_t) &= 0 \\
 \text{var}(w_t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_w^2 (1 + \lambda^2 - 2\lambda\rho) \sigma_u^2 \\
 \text{cov}(w_t, w_{t-k}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ww-k} = \rho^{(k-1)} (\rho - \lambda) (1 - \lambda\rho) \sigma_u^2, \\
 &\quad k = 1, 2, \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

14) Dhrymes, 前掲参照。

が成立する。これより、 w_t の 1 階の自己相関係数は、

$$\frac{\text{cov}(w_t, w_{t-1})}{\text{var}(w_t)} = \frac{(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho)}{(1 + \lambda^2 - 2\lambda\rho)} \dots\dots\dots(20)$$

となり、合成攪乱項が、 $\rho = 0$ の場合でもなお自己相関を示すことがわかる。また、

$$E(w_t, Y_{t-1}) = \frac{(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho)}{1 - \beta\sigma} \sigma_u^2 \dots\dots\dots(21)$$

となり¹⁵⁾、これは、 $\rho = \lambda$ または $\lambda\rho = 1$ でないかぎり、遅れのある説明変数 Y_{t-1} と合成項乱項 w_t の間に相関関係の存在することを示している。

さて、(14)式に最小 2 乗法を適用し、係数 α 、 β の推定量を求めると、

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_t^2 & \sum X_t Y_{t-1} \\ \sum X_t Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum X_t Y_t \\ \sum Y_t Y_{t-1} \end{pmatrix} \dots\dots(22)$$

となる¹⁶⁾。これらの期待値をとると、

$$\begin{pmatrix} E(\hat{\alpha}) \\ E(\hat{\beta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + E \left\{ \begin{pmatrix} \sum X_t^2 & \sum X_t Y_{t-1} \\ \sum X_t Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum X_t w_t \\ \sum Y_{t-1} w_t \end{pmatrix} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$$\begin{aligned} 15) E(w_t, Y_{t-1}) &= E(w_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i w_{t-i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E(w_t w_{t-i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (\beta\rho)^i (\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho) \sigma_u^2 \\ &= \frac{(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho)}{1 - \beta\rho} \sigma_u^2 \end{aligned}$$

となるが、(2)式で示したように Y_{t-1} と w_t の間に相関のあることから右辺第2項はゼロベクトルにならない¹⁷⁾。したがって $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ はそれぞれ、 α 、 β の不偏推定量ではないことになり、最小2乗法による小標本特性は好ましくないことを示している。

そこで、大標本特性について検討するために(2)式の確率極限をとれば、

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T-1} \begin{pmatrix} \sum X_t^2 & \sum X_t Y_{t-1} \\ \sum X_t Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{T-1} \sum X_t w_t \\ \frac{1}{T-1} \sum Y_{t-1} w_t \end{pmatrix} \dots\dots\dots(24)$$

の形となる。右辺第2項の各要素について確率極限を求めると、最小2乗推定量の大標本バイアスは最終的に、

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\beta} - \beta \end{pmatrix} = \frac{(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho)\sigma_u^2}{\sigma_v^2 + \alpha^2\sigma_{z-1}^2 \left(1 - \frac{\sigma_{xz-1}}{\sigma_x^2\sigma_{z-1}^2}\right)} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_{xz-1}}{\sigma_x^2} \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(25)$$

となる。ここで、

$$\sigma_v^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t v_t^2, \quad v_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i w_{t-i}$$

$$\sigma_{z-1}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-1} \sum_t Z_{t-1}^2, \quad Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i X_{t-i}$$

16) α 、 β の推定量として $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ という具合に ^ (ハット) 記号を冠した。また(2)式中の和をとるための Σ (シグマ) 記号については、本来添字がつくべきであるが略記した。以下同様。

17) 逆行列の中にも確率変数 Y_{t-1} が含まれているため、右辺第2項の計算は容易ではない。

$$\sigma_{x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-1} \sum_t X_t^2$$

$$\sigma_{xz-1} \stackrel{\text{def}}{=} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-1} \sum_t X_t Z_{t-1} \dots\dots\dots(25)$$

である¹⁸⁾。

(25)式から、 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ が一致推定量でないことがわかる。したがって、政府支出効果のラグを伴うモデル(10)式から(14)式まで)への最小2乗法の適用は、小標本においても、大標本においても良い特性をもたらさないといえる。

IV 結

われわれは上で、政府支出効果の遅れのモデルとして幾何的減少型をとりあげ、各種設定されてきた攪乱項を統一して統計的モデルを再構築し、最小2乗法を適用した結果、推定量が大標本においても小標本においても一定のバイアスをもつことを証明した。特に大標本におけるバイアスについては、これを解

18) (25)式の結果を得るためには、(24)式の個々の要素について確率極限を求めることになるが、その際に、

$$Y_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i X_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i w_{t-i}$$

$$= \alpha Z_t + V_t$$

の関係を利用している。また、

$$\sigma_V^2 = \text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-1} \sum_t V_{t-1}^2 = \text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t V_t^2$$

$$= \frac{(1 + \beta \rho + \lambda^2 + \beta \lambda^2 \rho - 2 \beta \lambda - 2 \lambda \rho)}{(1 - \beta^2)(1 - \beta \rho)} \sigma_u^2 \dots\dots\dots(26')$$

となるが、これの導出は次の手続きによる。

$$\text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t V_t^2 = \text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t \left(w_t + \beta w_{t-1} + \beta^2 w_{t-2} + \dots \right)^2$$

$$= \text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} w_{t-i}^2 \right)$$

消するため、各種の巧妙な推定方法が考案されてきている¹⁹⁾。しかしながら、いずれの方法にしても、かなり非現実的な仮定ないし条件のもとでのみ問題の解決が図られており、実証分野への適用には今一步の研究が必要とされる。また、こうした計量経済学上の問題のみでなく、序でも指摘したように、データ未整備のため行政レベル指標の特定化に困難性があるなど統計上の問題も残されており、地域経済諸統計の全般的な拡充整備と併せて、特に財政統計指標に関する研究も待たれる。

$$+ \text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \sum_t \left(\sum_{\substack{i < j \\ i=0}}^{\infty} \beta^{(i+j)} w_{t-i} w_{t-j} \right) \dots\dots\dots (26'')$$

ここで(19)式により、

$$\text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t w_{t-i}^2 = (1 - 2\lambda\rho + \lambda^2) \sigma_u^2$$

であるから、(26'')式の右辺第1項は

$$\begin{aligned} \text{〔第1項〕} &= (1 - 2\lambda\rho + \lambda^2) \sigma_u^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \\ &= \frac{(1 - 2\lambda\rho + \lambda^2) \sigma_u^2}{(1 - \beta^2)} \end{aligned}$$

となる。また、(19)式により、 $i < j$ 、 $i = 0, 1, 2, \dots$ のもとでは、

$$\text{Plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_t (w_{t-i} w_{t-j}) = \rho^{(j-i-1)} (\rho - \lambda) (1 - \lambda\rho) \sigma_u^2$$

であるから、(26'')式の右辺第2項は、

$$\text{〔第2項〕} = 2(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho) \sigma_u^2 \sum_{\substack{i < j \\ i=0}}^{\infty} \beta^{(i+j)} \rho^{(j-i-1)}$$

となるが、ここで、 $j = i + k$ 、 $k = 1, 2, \dots$ と変換すれば、

$$\begin{aligned} \text{〔第2項〕} &= 2(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho) \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(2i+k)} \rho^{(k-1)} \\ &= 2(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho) \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{(2i+1)} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\rho)^{(k-1)} \\ &= 2(\rho - \lambda)(1 - \lambda\rho) \sigma_u^2 \frac{\beta}{(1 - \beta^2)(1 - \beta\rho)} \end{aligned}$$

となる

19) GrilichesおよびGupta前掲などを参照。