

ハドロンの相対論的複合粒子模型

藤 村 公 男

§ 1 ま え が き

素粒子は、相互作用の大体の強さに従って、強い相互作用をする重粒子と中間子（両者をまとめてハドロンといわれる）、電磁相互作用だけをする光子と弱い相互作用をする軽粒子に大別される。戦後著しく進歩した大型加速器による実験技術によって素粒子とその共鳴状態は無数に発見され、現在知られている素粒子とその共鳴状態の数は200以上に及ぶといわれている。しかし無数にあるハドロンの中で比較的質量準位の低いものは素粒子の特性であるスピン (J)、パリティ (P) が共通なものが多くあり、これらをまとめて一つの多重項 (multiplet) を構成することが可能である。多重項の代表的な例は中間子では擬スカラー ($J^P = 0^-$) の8重項 (octet) (π^+ , π^0 , π^- , η , K^+ , K^0 , K^- , \bar{K}^0)、ベクトル中間子 ($J^P = 1^-$) の8重項 (ρ^+ , ρ^0 , ρ^- , ϕ , K^{*+} , K^{*0} , K^{*-} , \bar{K}^{*0}) と1重項 ω_1 である。また重粒子では $J^P = \frac{1}{2}^+$ の8重項 (p , n , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Λ , Ξ^0 , Ξ^-)、 $J^P = \frac{3}{2}^+$ の10重項 (decuplet) (Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , Σ^{*+} , Σ^{*0} , Σ^{*-} , Ξ^{*0} , Ξ^{*-} , Ω^-) と1重項 Λ_0^* である。このような分類は原子分子物理学や原子核物理学で用いられている群論的な方法で行なわれ、これを素粒子論における対称性と呼ばれている。前記の1重項、8重項、10重項の多重項はSU(3)対称性によるものである。一方このようなハドロンにみられる対称性が生ずる原因として、より基本的な物質が存在すると仮定し、ハドロンはこの基本的物質から構成され

ているとするのが素粒子論における複合粒子模型の考えである。このような複合粒子模型を考える利点は、原子核が陽子と中性子の複合系として扱われ原子核の多様性を説明するのと同様、無数にある素粒子の多様性を数個のより基本的な物質（または粒子）のさまざまな配列の仕方の多様性で説明でき、また素粒子間の複雑な相互作用をこれら基本物質間の相互作用で系統的に説明し得ることである。このような観点から最初に提案されたのが坂田模型⁽¹⁾である。また坂田模型に基づいて素粒子を最初に群論的な手法で分類したのが I-O-O 対称性⁽²⁾である。以後これらを一層実験結果に合致するように修正した SU(3) および SU(6) 対称性、⁽³⁾ quark 模型⁽⁴⁾ を経て今日に至る約15年間、素粒子の対称性と複合粒子模型は多くの成果を収めた一方、いくつかの問題点も提起し、現在でも尚素粒子論の中心的課題の一つとなっている。

quark 模型⁽⁴⁾によると、ハドロンは quark と呼ばれる基本的粒子⁽⁵⁾ とその反粒子である anti-quark から構成される複合系として扱われる。quark は 3 個あり、通常これらを u , d , s と表わされる。これらの量子数を第 1 表に示しておく。特に注目すべきは

第 1 表 quarks の量子数

quark が $\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ (e は陽子の電荷である) など分数電荷 (fractional charge) を持っていることである。昔から我々は電荷の最小単位は e (又は $-e$)

quarks	u	d	s
重 粒 子 数	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
アイソスピン	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ハイパーチャージ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
電 荷	$\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$

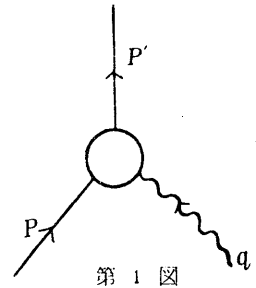
であるという先入観を持って

e は陽子の電荷

るが、また事実現在まで分数電荷を持つ粒子が発見されていないが、quark 模型はこれを破っている。quark 模型が、基本粒子の電荷があくまでも e (または $-e$) となっている坂田模型と決定的に異なるのはまさにこの点である。またこの分数電荷が quark が実在するかどうか実験で決める有力な手がかりとなっている。ところでハドロン(複合系)内部に於ける quark および anti-quark の相対運動は非相対論的である。このことを強調するため quark 模型は非相対論的 quark 模型⁽⁶⁾ とも呼ばれている。

相対論的複合粒子模型

quark 模型はハドロンのスピン, パリティ, ハイパーチャージによる分類だけでなく質量公式, 磁気能率などの静的な性質の説明に応用され成功している。更に素粒子間の散乱現象にも応用されており特に高エネルギー散乱はハドロンを構成する quark 間の散乱の重ね合わせとして表現できるということが多くの例によって示されている。複合粒子模型において, ハドロン同志の反応では, 2個の入射粒子が共に複合系であるのに比べて, 点粒子である光子とハドロンとの反応ではハドロンだけが複合系として扱われるので一層単純であり, ハドロンの構造が直接に解明できると考えられる。このような観点に立って非相対論的 quark 模型によって核子の電磁的構造因子⁽⁷⁾ や核子の光子による励起⁽⁸⁾ が調べられている。しかしこれらの解析では, ハドロンを非相対論的な波動関数で表現しているのので, 高エネルギー反応や運動量転移の大きい領域における電磁的構造因子および核子の電磁的励起等には適用できない。一例をあげると核子の電磁的構造因子が現われる反応は第1図のようなファインマングラフで表わされる。第1図で P , P' , q はそれぞれ入射核子, 被散乱核子, 仮想光子の4元運動量である。さて運動量転移 q のローレンツ不変な2乗 $q^2 = q^2 - q_0^2$ (以後ゴチックのローマ字は3次元ベクトルを表わす) が核子の質量の2乗 M^2 より充分大きな領域, $q^2 \gg M^2$, 従って $q^2 \gg M^2$, を考える。



4元運動量の保存則 $P + q = P'$ から $q^2 = (P' - P)^2 \gg M^2$ となるので $|P|$ か $|P'|$ のどちらか一方または両方が M より充分大きくなければならない。結局入射核子が被散乱核子の一方または両方の運動量とその質量に比べて充分大きくなければならない。従って q^2 の大きい領域では核子の波動関数は相対論的に記述されていなければならない。このことは2個のハドロンによる高エネルギー散乱の場合にも同様である。複合粒子模型の立場からハドロンの高エネルギー現象を究明するには, この相対論化は不可避である。本論文の目的は, 非相対論的 quark 模型をいかに相対論化し得るか, その一つのモデルを示すことである。既に著者達⁽⁹⁾ は相対論的効果の一つとして, ローレンツ収縮の考えを導入し,

核子の電磁的構造因子と電磁的励起を分析し、その理論的結果は実験と極めて良く一致することを示したが、本論文ではもっと一般的な構想の下で複合粒子模型の相対論化を行なう。ローレンツ収縮はこの相対論化の当然の結果として導出できる。

§ 2 複合粒子模型の相対論化

非相対論的 quark 模型⁽⁶⁾では重粒子は3個の quarks の複合系、中間子は quark と anti-quark の複合系として表わされ、複合系内部における quark および anti-quark の内部運動は非相対論的である。このような複合系の波動関数は SU(6) 対称性の既約表現に対応する波動関数 χ_{s, s_z} と quark の内部運動を表わす内部空間波動関数 ϕ_{L, L_z} の直積で次のように書ける：

$$\Psi_0(J, J_z) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iMx_0} \sum_{S_z, L_z} C(S, L; S_z, L_z; J, J_z) \chi_{s, s_z} \phi_{L, L_z}. \quad (1)$$

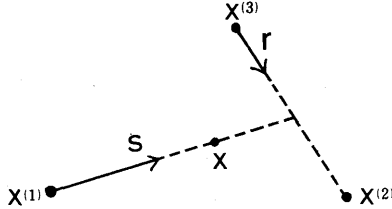
ここで V は重心座標の規格化体積、 x_0 は重心座標の時間成分、 J, S, L はそれぞれ複合系のスピン、SU(6) のスピン、内部角運動量である。また J_z, S_z, L_z はそれぞれの z 成分、 $C(S, L; S_z, L_z; J, J_z)$ は Clebsh-Gordon 係数である。 M は複合系の質量である。重粒子の場合には3個の quarks の座標を $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$ ($i = 1, 2, 3$)、とすると便宜上

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \frac{1}{3}(x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + x_i^{(3)}), \\ r_i &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_i^{(2)} - x_i^{(3)}), \\ s_i &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-2x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + x_i^{(3)}) \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} (2)$$

によって重心座標 X_i と相対座標 r_i, s_i を定義する。(第2図参照)。(1)式の ϕ_{L, L_z} は quark 間の相対座標だけに関係するので重粒子の場合これは r_i と s_i の関数として表わせる。 ϕ_{L, L_z} の関数形は一般的には理論的に導出できない。

相対論的複合粒子模型

ただし quark がパラフェルミ統計に従うものとする、複合系の波動関数(1)式が全体として完全対称でなければならないので、完全対称な χ_{s, s_z} に対しては ϕ_{L, L_z} は完全対称、反対称な χ_{s, s_z} に対しては ϕ_{L, L_z} は反対称でなければならない。しかし多くのハドロンに対してその質量の2乗とスピン J との関



第 2 図

係がほぼ 1 次式で表わせるという実験事実から内部運動については調和振動子型のポテンシャルが採用されている。この場合基底状態 ($L=L_z=0$) を表わす波動関数は次の 3 次元ガウス型関数で表わされる：

$$\phi_{0,0} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}^3 \exp\left[-\frac{\alpha}{2}(r^2 + s^2)\right] \quad (3)$$

任意の L, L_z に対する波動関数 ϕ_{L, L_z} は(3)式を基にして作り上げられる。(3)式において α は複合系の空間的広がりを表わすパラメーターである。SU(6) 対称性の波動関数 χ_{s, s_z} は、重粒子の場合、反対称な 20 次元表現に属するもの、完全対称な 56 次元表現に属するものと 70 次元表現に属するものとに分類され、SU(3) 対称性の波動関数と quark のスピン波動関数の積の和として表わせる。例として核子が属する 56 次元表現のアイソスピン $I=1/2$ 、スピン $S=1/2$ の波動関数を示しておく：

$$\chi_{1/2, 1/2} \quad (56) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \{ (2\alpha\alpha\beta - \alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha) u u d + (-\alpha\alpha\beta - \alpha\beta\alpha + 2\beta\alpha\alpha) d u u + (-\alpha\alpha\beta + 2\alpha\beta\alpha - \beta\alpha\alpha) u d u \} \quad (4)$$

ここで u, d は quark のユニタリスピンの状態を示し、 α と β は quark のスピンの z 成分が $1/2$ と $-1/2$ の状態を表わす。(u, d の量子数については第 1 表を参照)。

非相対論的 quark 模型の立場では核子の波動関数として(1), (2), (3)式を使って分析がなされてきた。しかしこれらの分析では(3)式をどのような座標系での複合系の内部波動関数として用いるかについては全く不問に付されている。これらの分析の対象となる電磁的構造因子や断面積などは相対論的不変な形で定義されているのに、これらを相対論的に共変な形で定義されていない(1), (2), (3)式から導出することは不可能である。

以下いくつかの仮説の下に相対論化された波動関数を構成する。先ず仮定することは非相対論的 quark 模型と同様、重粒子は 3 個の quarks, 中間子は quark と anti-quark から構成され、これら複合系の波動関数はやはり(1)式のようにユニタリスピンのスピン波動関数および内部波動関数の直積として表わせるということである。従って 4 元運動量 $P (P_0, \mathbf{P})$ をもった複合系の波動関数は

$$\Psi_P (J, J_z) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{iPX} \Sigma C (S, L; S_z, L_z; J, J_z) \chi_{s, s_z} (P) \Phi_{L, L_z} (P) \quad (5)$$

と書ける。ここでメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ を $g_{00} = -1, g_{ij} = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2, 3), g_{\mu\nu} = 0, (\mu \neq \nu)$, ととる。従って $P \cdot X = P \cdot X - P_0 X_0$ である。(5)式において一般に χ_{s, s_z} は P の関数, Φ_{L, L_z} は P と quark の相対座標の関数となっている。 $\chi_{s, s_z} (P)$ において相対論化に関係するのはスピンでありユニタリスピンの関係しない。ところで相対論的場の理論では波動方程式または波動関数は 1 つの 4 次元座標によって記述され、素粒子を拡がりがない点粒子とみなしている。従って我々の複合粒子模型において、拡がりを零にした極限、従って(5)式で Φ_{L, L_z} を無視した極限において(5)式の Ψ_P は場の理論の波動関数に一致すると考える。このように考えると、(5)式に現われる $e^{iPX} \chi_{s, s_z} (P)$ は運動量 P , スピン S の点粒子の相対論的場の理論の波動関数に対応している。従って $e^{iPX} \chi_{s, s_z} (P)$ はスピン S の Bargman-Wigner 方程式に従うものとして扱うことが出来る。よって

$$\chi_{s, s_z} (P) = u \begin{matrix} (s, s_z) \\ \alpha\beta\gamma \dots \end{matrix} \quad (6)$$

とおくと

$$(\gamma \cdot P - M)_{\alpha\alpha'} u_{\alpha'}^{(s, s_z)} = 0 \quad (7)$$

と書ける。 r_μ は Dirac の r -matrix, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ はスピン指標である。(7)式は, $S = 1/2$ の場合には Dirac 方程式, $S = 3/2$ の場合には Rarita-Schwinger 方程式に他ならない。 $\chi_{s, s_z}(P)$ はスピンとユニタリスピンの指標を含むが, 非相対論的 quark 模型と同様 quark が $1/2$ のスピンと $SU(3)$ のユニタリスピンを持っていると仮定しているので, (6)式の $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ は quark のスピン指標と同時にユニタリスピン指標をも含むものとしておく。最も簡単な例として核子の $\chi_{s, s_z}(P)$ を具体的に示すと, これは Dirac 方程式の解となるので,

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(P56) = \left[\sqrt{\frac{P_0 + M}{2P_0}} \begin{pmatrix} IO \\ OI \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{P_0 - M}{2P_0}} \frac{\sigma \cdot P}{|P|} \begin{pmatrix} OI \\ IO \end{pmatrix} \right] \left(\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right)_0^{(56)} \quad (8)$$

となる。ここで σ は各 quark のパウリのスピンマトリックスの和, $\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(56)$, は(4)式で与えられる $SU(6)$ のスピン-ユニタリスピン波動関数である。 I は 2 行 2 列の単位行列である。

次に内部空間波動関数の相対論化を行なう。非相対論的 quark 模型では内部空間波動関数を記述するのに 3 次元空間座標が用いられた。これを相対論化する最も自然な方法は, これら 3 次元空間座標を 4 次元の時空座標に拡張することであろう。我々は複合系の内部波動関数は 4 次元時空座標で記述できると仮定する。この仮定は湯川の非局所場理論¹⁰⁾と同様である。従って重粒子では 3 個の 4 次元座標 $x_\mu^{(1)}, x_\mu^{(2)}, x_\mu^{(3)}$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$), が必要である。すると非相対論的 quark 模型の(2)式と同様にして

$$\left. \begin{aligned} X_\mu &= \frac{1}{3} (x_\mu^{(1)} + x_\mu^{(2)} + x_\mu^{(3)}) \\ r_\mu &= \frac{1}{\sqrt{6}} (x_\mu^{(2)} - x_\mu^{(3)}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$s_{\mu} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (-2x_{\mu}^{(1)} + x_{\mu}^{(2)} + x_{\mu}^{(3)}),$$

$$(\mu=0, 1, 2, 3)$$

によって互いに独立な複合系の 4 次元重心座標 X_{μ} と 2 個の 4 次元相対座標 r_{μ}, s_{μ} が定義できる。(5)式の $\Phi_{L, L_z}(P)$ は P_{μ} と r_{μ}, s_{μ} の関数である。

$\Phi_{L, L_z}(P)$ の関数形は複合系内部での quark 間の力の形に関係する。またこの力は複合系全体の質量に関係する。前記した如く比較的低い質量単位のハドロンスピンの質量の 2 乗とほぼ 1 次の関係式となっていることが実験的に知られている。われわれはこの事実に注目し、この 1 次関係を導出する内部力として 4 次元調和振動子型の力を採用する。すると複合系の波動方程式は

$$\left[\frac{1}{2M_q} \sum_{i=1}^3 (p^{(i)})^2 + \frac{k}{2} \sum_{i < j=1}^3 (x^{(i)} - x^{(j)})^2 + \text{const.} \right] \Psi = 0 \quad (10)$$

と表わせる。(10)式で M_q は quark の質量、 k は調和振動子の弾性係数である。 $p_{\mu}^{(i)}$ は $x_{\mu}^{(i)}$ に対応する正準共役な運動量変数 $-i\partial/\partial x^{(i)\mu}$ であり、次の交換関係を満す：

$$[x_{\mu}^{(i)}, p_{\nu}^{(j)}] = ig_{\mu\nu} \delta_{ij}, \quad \left(\begin{matrix} \mu, \nu=0, 1, 2, 3 \\ i, j=1, 2, 3 \end{matrix} \right). \quad (11)$$

(10)式を(9)式の重心座標と相対座標で表わすと

$$(p^2 + \mathcal{M}^2) \Psi = 0, \quad (12)$$

$$\mathcal{M}^2 = p_{(r)}^2 + p_{(s)}^2 + \alpha^2 (r^2 + s^2) + \text{const.} \quad (13)$$

となる。ここで、 $p_{\mu}, p_{(r)\mu}, p_{(s)\mu}$ はそれぞれ $X_{\mu}, r_{\mu}, s_{\mu}$ に対応する正準共役な運動量変数である。 α は M_q と k だけに関係する常数である。 \mathcal{M}^2 は質量の 2 乗の演算子 (mass operator) である。(13)式から明らかなように \mathcal{M}^2 は相対座標だけに関係するので重心座標と相対座標を変数分離できる。今 \mathcal{M}^2 の固有値を M^2 とし、固有関数を $\Phi(r, s)$ とする：

$$\mathcal{M}^2 \Phi(r, s) = M^2 \Phi(r, s). \quad (14)$$

すると Ψ は $\exp(iP \cdot X)\Phi(r, s)$ のように重心座標 X_{μ} に関する平面波 $\exp(iP \cdot X)$ と r_{μ}, s_{μ} に関する内部波動関数 $\Phi(r, s)$ に変数分離され

相対論的複合粒子模型

(12)式から P^2 の固有値は $P^2 = -M^2$ となる。よって M は複合系全体の、従ってハドロンの質量となる。また P_μ は複合系全体の4元運動量である。ここでは自由場としてのハドロンを問題にしているので $M^2 > 0$ でなければならない。しかし(14)式の固有値 M^2 が一般にどのような値をとり得るか調べるため4次元調和振動子の変数

$$\left. \begin{aligned} a_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (ip_{(r)\mu} + \alpha r_\mu), & a_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (-ip_{(r)\mu} + \alpha r_\mu), \\ b_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (ip_{(s)\mu} + \alpha s_\mu), & b_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (-ip_{(s)\mu} + \alpha s_\mu), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

を導入する。 a_μ と a_μ^+ 、 b_μ と b_μ^+ の間には次の交換関係

$$[a_\mu, a_\nu^+] = [b_\mu, b_\nu^+] = g_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (16)$$

が成り立ち、その他の交換関係は零となる。(13)式の \mathcal{M}^2 をこれらの変数で表わすと

$$\mathcal{M}^2 = 2\alpha [a^+ \cdot a + b^+ \cdot b] + \text{const.} \quad (17)$$

となる。非相対論的な3次元調和振動子模型においては、(15)式の a_i^+ 、 b_i^+ 、($i = 1, 2, 3$) は振動子の励起の生成演算子 (creation operator)、 a_i 、 b_i 、($i = 1, 2, 3$) は消滅演算子 (annihilation operator) と呼ばれ、質量の高い状態は基底状態に生成演算子を作用することにより得られ、常に $M^2 > 0$ が保証されていた。しかし4次元調和振動子においてはこれら空間成分の他に時間成分である a_0^+ 、 a_0 、 b_0^+ 、 b_0 が必要である。この時間成分の処理が困難である。その原因は(16)式の交換関係が $[a_i, a_i^+] = 1$ 、 $[a_0, a_0^+] = -1$ となり、空間成分と時間成分とで符号がちがうこと、および(17)式で $a^+ \cdot a = a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + a_3^+ a_3 - a_0^+ a_0$ となり、やはり \mathcal{M}^2 への空間成分の寄与と時間成分の寄与とで符号が反対になることによる。しかしこれらは相対論の要求であり変えることはできない。一つの簡単な例をあげるため a_0^+ を生成演算子、 a_0 を消滅演算子としてみる。基底状態を $|0\rangle$ で表わすと時間成分の1回の励起状態は $a_0^+ |0\rangle$ となり、この adjoint は $\langle 0 | a_0$ となる。しかし(16)式の交換関係 $[a_0, a_0^+] = -1$ から、この状態のノルム (norm) は $\langle 0 | a_0$

$a_0^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [a_0, a_0^\dagger] | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle$ となり符号が確定しないノルム (indefinite norm) という困難が生ずる。これをさける一つの方法は $a_0^\dagger | 0 \rangle$ の adjoint として $-\langle 0 | a_0$ をとることである。一般に時間成分の n_0 回の励起状態 $| n_0 \rangle$ の adjoint として $\langle n_0 | = (-1)^{n_0} \langle 0 | (a_0)^{n_0} / \sqrt{n_0!}$ をとれば $\langle n_0 | n_0 \rangle = 1$ かつ $M^2 > 0$ にすることができる。困難をさけるもう一つの方法は時間成分の励起が生じないように補助条件を相対論的不変な形で導入することである。この補助条件はすべての励起状態および基底状態 $| n \rangle$ に $P \cdot a^+ | n \rangle = P \cdot b^+ | n \rangle = 0$ という制約を加えることによって実現される。これらの式を附加することによって常に $M^2 > 0$ が保証され、 $\langle n | n \rangle = 1$ と規格化することが可能である。しかし一方このような取り扱いの欠点は、この補助条件を満足するように選ばれた状態だけでは量子力学で要求されるヒルベルト空間での系の完全性が失われる、ということである。この欠点はユニタリティ関係を問題にするとときに現われてくる。この問題は難かしく解決し得るかどうかの見通しは今のところない。ここでは一応自由場のハドロン従って $-P^2 = M^2 > 0$ を扱うということに問題を制限し、ユニタリティ関係で問題となる $-P^2 = M^2 < 0$ の場合は今後の研究にゆだねることにする。しかしこのような制限を加えることによって理論の有効性は無くなるわけではない。というのは、多くの素粒子反応において、反応の始状態と終状態はいくつかの自由場のハドロンによって規定され、これが反応の振巾に影響するからである。以上のことからわれわれは基底状態およびすべての励起状態 $| n \rangle$ に対して次の補助条件を附加する：

$$P \cdot a^+ | n \rangle = P \cdot b^+ | n \rangle = 0. \quad (18)$$

この条件の下に基底状態の波動関数は

$$\Phi_{0,0}(P; r, s) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \exp \left[-\frac{\alpha}{2} (r^2 + s^2 + 2 \frac{(P \cdot r)^2 + (P \cdot s)^2}{M^2}) \right] \quad (19)$$

で与えられる。これは後述するように内部軌道角運動量が零 ($L = L_z = 0$) の波動関数に対応する。また(19)式は $\iint |\Phi_{0,0}|^2 d^4 r d^4 s = 1$ となるように規格化してある。この $\Phi_{0,0}$ はハドロン⁰の静止系 $P = 0$ では $\Phi_{0,0}(P = 0,$

相対論的複合粒子模型

$P_0 = M, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = (\alpha/\pi)^2 \exp \left[-\frac{\alpha}{2} (\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}_0^2 + \mathbf{s}^2 + \mathbf{s}_0^2) \right]$ となり3次元座標 $r_i, s_i, (i=1, 2, 3)$, ばかりでなく時間座標 r_0, s_0 についてもガウス型関数となっており非相対論的模型の(3)式と厳密には一致しない。これも今後に残された問題である。

内部波動関数 Φ_{L, L_z} は M^2 の固有状態であると同時に内部軌道角運動とその z 成分の固有状態でもある。角運動量を相対論的に扱うため、パウリ-ルバンスキ (Pauli and Lubansky) の4元ベクトル

$$W_\mu = -\epsilon_{\mu\nu\xi\eta} \frac{P^\nu}{\sqrt{-P^2}} (r^\xi p^\eta_{(r)} + s^\xi p^\eta_{(s)}) \quad (20)$$

を用いる。 $\epsilon_{\mu\nu\xi\eta}$ は4次元反対称単位テンソルであり (μ, ν, ξ, η) が $(0, 1, 2, 3)$ の偶順列のとき1, 奇順列のとき-1の値をとる。ハドロンの静止系 $\mathbf{P}=0$ においては(20)式は $W_0=0, \mathbf{W} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}_{(r)}] + [\mathbf{s} \times \mathbf{p}_{(s)}] \equiv \mathbf{L}$ となり, \mathbf{L} は非相対論的模型の内部軌道角運動量に一致する。 $W_\mu W^\mu = \mathbf{W}^2 - W_0^2$ は相対論的不変な演算子となるので, 固有値方程式

$$W_\mu W^\mu \Phi_{L, L_z} = L(L+1) \Phi_{L, L_z} \quad (21)$$

は軌道角運動量に関する相対論的に不変な固有値方程式となっている。(21)式はハドロンの静止系で $L^2 \Phi_{L, L_z}(\mathbf{P}=0) = L(L+1) \Phi_{L, L_z}(\mathbf{P}=0)$ となるので, 軌道角運動 L は非相対論的模型のそれと完全に一致している。従って L は $0, 1, 2, 3, \dots$ の値をとる。 $[W_\mu W^\mu, W_\nu] = 0, (\nu=0, 1, 2, 3)$ が成り立つので Φ_{L, L_z} は $W_\mu W^\mu$ の固有状態であると同時に W_μ の一つの成分 $W_{(3)}$ の固有状態にすることが可能である。その固有値を L_z とすると

$$W_{(3)} \Phi_{L, L_z} = L_z \Phi_{L, L_z} \quad (22)$$

と書ける。 $W_{(3)}$ を相対論的不変な形で決めるため3個の space like な4次元単位ベクトル $e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, e_\mu^{(3)}$ を導入する。これらは次の正規直交関係を満すものとしておく:

$$e_\mu^{(i)} e^{(j)\mu} = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2, 3) \quad (23)$$

$e_\mu^{(3)}$ は space like なので, time like な P_μ に直交するように, 次のように

表わすことが可能である：

$$e_{\mu}^{(i)} = -\varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} \frac{P^{\nu}}{\sqrt{-P^2}} e^{(j)\xi} e^{(k)\eta}, \quad (24)$$

但し $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶順列。

これらの単位ベクトルを使って次式のように演算子 W_{\pm} , $W_{(3)}$ を定義する：

$$\left. \begin{aligned} W_{\pm} &= (e_{\mu}^{(1)} \pm ie_{\mu}^{(2)}) W^{\mu}, \\ W_{(3)} &= e_{\mu}^{(3)} W^{\mu} \end{aligned} \right\} (25)$$

W_{\pm} と $W_{(3)}$ の間の交換関係は

$$\left. \begin{aligned} [W_{+}, W_{-}] &= 2W_{(3)}, \\ [W_{\pm}, W_{(3)}] &= \mp W_{\pm} \end{aligned} \right\} (26)$$

となることが容易に証明できる。以上全く相対論的に共変な形で議論を進めてきたが、(26)式は非相対論的な 3次元角運動に対して成り立つ良く知られた交換関係と全く相似していることに注目すべきである。すなわち W_{+} は $W_{(3)}$ の固有値 L_z を 1 だけ増加させ、 W_{-} は L_z を 1 だけ減少させる演算子である。従って L_z は $L, L-1, L-2, \dots, -L+1, -L$ の値をとる。

(19)式で示された基底状態 $\Phi_{0,0}$ に対して(20)式を使って、直接

$$W_{\mu} \Phi_{0,0} = 0, \quad W_{(3)} \Phi_{0,0} = 0, \quad (27)$$

となることが証明されるので、(19)式の $\Phi_{0,0}$ は $L=L_z=0$ の波動関数となっている。一般の L, L_z に対する Φ_{L, L_z} は $\Phi_{0,0}$ にいくつかの a_{μ}^{+} と b_{μ}^{+} を作用することにより、次のようにして求めることができる。変数 a_{μ}^{+} , b_{μ}^{+} と $e_{\mu}^{(i)}$, ($i=1, 2, 3$), から次のような演算子 a_{\pm}^{+} , b_{\pm}^{+} , A を定義する：

$$\left. \begin{aligned} a_{\pm}^{+} &= e_{\pm\mu}^{(1)} a_{\mu}^{+}, \quad b_{\pm}^{+} = e_{\pm\mu}^{(2)} b_{\mu}^{+}, \quad A = (a_{\pm}^{+})^2 + (b_{\pm}^{+})^2, \end{aligned} \right\} (28)$$

但し $e_{\pm\mu} = e_{\mu}^{(1)} \pm ie_{\mu}^{(2)}$.

すると(16)式を使って次の交換関係が得られる：

$$\left. [W_{\mu} W^{\mu}, A] = 6A + 4i\varepsilon^{\mu\nu\xi\eta} e_{+\nu} \frac{P_{\xi}}{\sqrt{-P^2}} (a_{\eta}^{+} a_{\pm}^{+} + b_{\eta}^{+} b_{\pm}^{+}) W_{\mu}, \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [W_{\mu} A^n] &= 2in \varepsilon_{\mu\nu\xi\eta} e^{\nu} \frac{P_{\xi}}{\sqrt{-P^2}} (a^{+\eta} a_{+}^{\dagger} + b^{+\eta} b_{+}^{\dagger}) A^{n-1}, \quad (n=1, 2, 3 \dots), \\ [W_{(3)}, A] &= 2A. \end{aligned} \right\} (29)$$

⑳および㉑式から次の方程式が成り立つのが証明される：

$$\begin{aligned} W_{\mu} W^{\mu} A^n \Phi_{0,0} &= 2n(2n+1) A^n \Phi_{0,0}, \\ W_{(3)} A^n \Phi_{0,0} &= 2n A^n \Phi_{0,0} \end{aligned}$$

従って L が偶数のとき $L = 2n$ とおくと、上式は

$$\left. \begin{aligned} W_{\mu} W^{\mu} A^{L/2} \Phi_{0,0} &= L(L+1) A^{L/2} \Phi_{0,0}, \\ W_{(3)} A^{L/2} \Phi_{0,0} &= L A^{L/2} \Phi_{0,0}, \\ \text{但し } L &= \text{偶数} \end{aligned} \right\} (30)$$

となる。㉑), ㉒)式と㉓)式を比較すると、結局 L が偶数のとき $A^{L/2} \Phi_{0,0}$ が $\Phi_{L,L}$ に対応している。 $\int |\Phi_{L,L_z}|^2 d^4 r d^4 s = 1$ と規格化すると

$$\Phi_{L,L} = \frac{1}{\sqrt{2^L L!!}} A^{L/2} \Phi_{0,0} \quad (L = \text{偶数}) \quad (31)$$

となる。 $L!!$ は $L(L-2)(L-4) \dots 2$ である。㉑)式以下に示した W_{-} の意味からわかるように $L_z < L$ の Φ_{L,L_z} は㉑)式の $\Phi_{L,L}$ に W_{-} を $L-L_z$ 回作用することにより得られる。結果だけを書くと

$$\Phi_{L,L_z} = \frac{1}{\sqrt{2^L L!!} \sqrt{(2L)!}} \sqrt{\frac{(L+L_z)!}{(L-L_z)!}} W_{-}^{L-L_z} A^{L/2} \Phi_{0,0} \quad (32)$$

但し $L = \text{偶数}$,

と書ける。ここで $x!$ は $x(x-1) \dots 2 \cdot 1$ を意味する。以上は L が偶数の場合であったが、奇数の場合も、ほぼ同様にして解を求めることが出来る。この場合は2種の解があり、結果のみを示す：

$$\Phi_{L,L_z}^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2^{L-1}} \sqrt{L+1} (L-1)!! \sqrt{(2L)!}} \sqrt{\frac{(L+L_z)!}{(L-L_z)!}} W_{-}^{L-L_z} a_{+}^{\dagger} A^{(L-1)/2} \Phi_{0,0}, \quad (33a)$$

$$\phi_{L, L_z}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}^{L-1} \sqrt{L+1} (L-1)!! \sqrt{(2L)!}} \sqrt{\frac{(L+L_z)!}{(L-L_z)!}} W_{-}^{L-L_z} b_{+}^{\dagger} A^{(L-1)/2} \phi_{0,0}, \quad (33b)$$

但し $L = \text{奇数}$ 。

(32), (33)式に現われた複雑な係数は規格化常数である。

以上で(21)および(22)式の固有値方程式を相対論的に共変な形で解くことが出来た。(32), (33)式で与えられる解は同時に質量の固有関数でもあり、質量 M と L との間には

$$M^2 = 2\alpha L + \text{const.} \quad (34)$$

の関係がある。この関係式は非相対論的模型のそれと一致し、実験的にも支持されている。すなわち我々の模型では、非相対論的模型と同様、高い質量準位への励起は内部角運動量の増加の形で行なわれる。この結果は、我々の模型では $P \rightarrow 0$ の極限で L を非相対論的なものと一致させ、 M^2 に現われる時間成分の寄与は補助条件を附加することにより落とし、非相対論的模型と実質的に同じになるようにしたことから明らかであろう。

最後に対称性についてふれておく。(32), (33)式に現われる演算子 W_{-} , A は、それらの定義式から明らかのように、quark の座標のすべての入れ替え $x_{\mu}^{(i)} \leftrightarrow x_{\mu}^{(j)}$, ($i, j = 1, 2, 3$)、に対して完全対称である。また(19)式からわかるように $\phi_{0,0}$ も完全対称である。従って L が偶数の内部波動関数(32)式は完全対称である。一方 L が奇数の内部波動関数については、 $x_{\mu}^{(2)} \leftrightarrow x_{\mu}^{(3)}$ の入れ替えに対してのみ (33a) 式の $\phi_{L, L_z}^{(a)}$ は反対称、(33b) 式の $\phi_{L, L_z}^{(s)}$ は対称である。従ってこれらの対称性に関しても全く非相対論的模型と同じである。よって非相対論的 quark 模型で通常やるように、quark はパラフェルミ統計に従うものと仮定すると、(5)式で表わされた全体の波動関数 $\Psi_P(J, J_z)$ を完全対称とするため、偶数の L に対しては56次元のスピンのユニタリスピンの波動関数 $\chi_{s, s_z}(P, 56)$ 、奇数の L に対しては70次元の $\chi_{s, s_z}(P, 70)$ を用いねばならない。

§ 3 結論と今後の問題点

我々は非相対論的 quark 模型を その好ましい特徴をなるべくそのままの形で保存した方法で相対論化し得ることを示した。しかし非相対論的 quark 模型と同様重粒子は 3 個の quarks, 中間子は quark と anti-quark の複合系として表現できるという仮定を行なっている。この仮定は相対論的場の理論からは必ずしも自明でないので, 我々の提案した相対論化にはある適用限界があり, その範囲内で正しい理論の近似となっているのであろう。それは多分, 複合系の運動エネルギーが quark の静止質量に比べて充分小さい範囲であると思われる。我々の行った第 2 に重要な仮定は, 重心座標と相対座標が完全に独立なことから, 前者にスピンの自由度を受け持たせ, 後者から内部角運動量を導びき, スピンについては Bargman-Wigner の運動方程式, 内部波動関数については 4 次元調和振動子型を採用したことである。ハドロンの対称性や質量と内部角運動量との関係等について非相対論的模型と全く同じに出来たのはこれらの仮定が効いている。しかし我々の模型と非相対論的模型とは静止系においても厳密には一致しない。それは, (19) 式以下で示したように, 静止系でも内部波動関数は相対時間の関数となっているからである。将来この模型を多くの具体的な分析に応用したとき, この影響がどの程度深刻に効いてくるかについては, 今のところ, あまりはっきりした予想はできない。その結果もし非相対論的 quark 模型の結論と著しく相異したときこれは重要な問題となるであろう。

我々の模型が非相対論的模型と決定的にちがうところは, 後者の内部波動関数がハドロンの質量 M だけに依存したのに対し, 前者のそれは M だけでなくその運動量 P にも依存することである。その結果として, 複合系はその走っている方向にローレンツ収縮を受ける。そしてこのローレンツ収縮の影響で運動量転移が大きい領域での核子の弾性的および非弾性的電磁構造因子の理論値は, 非相対論的模型のそれとは反対に, 極めて良く実験値と一致した。⁽⁹⁾ このことから我々の提案した模型は, 不完全ではあるが, 将来見出されるべき正しい理論に向って少し近づいているのかも知れない。

参考文献および註記

- (1) S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **16** (1956), 636.
- (2) M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, *Prog. Theor. Phys.* **22** (1959), 715.
- (3) Y. Nēeman, *Nuclear Phys.* **26** (1961), 222 and 230.
M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **125** (1962), 1067.
B. Sakita, *Phys. Rev.* **136** (1964), 1756 and *Phys. Rev. Letters* **13** (1964), 643.
B. Sakita and K. Wali, *Phys. Rev. Letters* **14** (1965), 404.
- (4) M. Gell-Mann, *Phys. Letters* **8** (1964), 214.
G. Zweig, *CERN preprints*, 1964.
- (5) 基本物質が粒子とみなされるか否かは現在不明である。便宜上ここでは粒子とみなしておく。
- (6) S. Ishida, *Prog. Theor. Phys.* **32** (1964), 922 ; **34** (1965), 64.
J. Iizuka, *Prog. Theor. Phys.* **35** (1966), 117 and 309. なお総合報告としては R. H. Dalitz, in *13th International Conference on High Energy Physics, Berkeley (1966)* (University of California Press, 1967) を参照されたい。
- (7) Y. Kinoshita, T. Kobayashi, S. Machida and M. Namiki, *Prog. Theor. Phys.* **36** (1966), 107.
S. Ishida, K. Konno and H. Shimodaira, *Prog. Theor. Phys.* **36** (1966), 1243.
- (8) K. Fujimura, T. Kobayashi, T. Kobayashi and M. Namiki, *Prog. Theor. Phys.* **37** (1967), 916 ; **38** (1967), 210.
- (9) K. Fujimura, T. Kobayashi and M. Namiki, *Prog. Theor. Phys.* **43** (1970), 73 ; **44** (1970), 193.
- (10) H. Yukawa, *Prog. Theor. Phys.* **2** (1947), 209.
H. Yukawa et al., *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **41** (1968).
T. Takabayashi, *Phys. Rev.* **139** (1965), B1381.