

# 非線型振動子の計算機実験

日南住 博<sup>\*1</sup>

## Computer Experiment on the Non-Linear Oscillators

Hiroshi HINAZUMI <sup>\*1</sup>

### Abstract

Computer experiment has been carried out on a harmonically driven dissipative pendulum and the Duffing oscillator. The results show that the phase-space trajectories of the dissipative pendulum depend on the initial conditions and /or the amplitude of the external force. The phase-space trajectories of the Duffing oscillator show complicated but periodic aspect, once the transient motion passes over,

**Key Words** : dissipative pendulum, phase-space trajectory, Duffing oscillator, chaos

### 1. はじめに

振動や波動は、振り子の運動や水面波を始めとして、自然界には数多く見受けられる現象で、それらの振る舞いを調べることは理論上も実用上も意義があると考えられる。

しかしながら、それらの大部分は複雑な方程式で記述されており、解析的な解を得る事は大変困難であるとおもわれる<sup>1)</sup>。幸いなことに、最近のパーソナルコンピューターや数式処理ソフト性能の改善に伴い、ある種の振動や波動現象については数値計算を実行することでそれらの振る舞いを調べることが可能になった。

ここでは、周期的外力と散逸力を受けて振動する単振り子と Duffing 振動子について計算機実験を行った結果について報告する。

### 2. 周期的外力を受ける単振り子

#### 2. 1 計算モデル

図 1 に示すように、長さ  $l$  の軽くて伸びない糸の先に質量  $m$  のおもりをつけ、これを鉛直面内で振動させる。このときおもりに周期的な外力  $F_0 \cos(\Omega t)$  と速さに比例する抵抗力が働くものとする、その運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \cos(\Omega t) - b \frac{dx}{dt} - mg \sin \theta \quad (1)$$

となる。ここで、 $x$  は最下点  $O$  より測った円弧の長さであり、右辺第 2 項は抵抗力で  $b > 0$ 、第 3 項は重力の運動方向への分力を表し、 $\theta$  は糸が鉛直線となす角である。 $x = l\theta$  の関係があるから、この方程式は

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_0 \cos(\Omega t) - bl \frac{d\theta}{dt} - mg \sin \theta \quad (2)$$

と書ける。

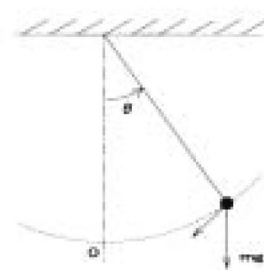


図-1. 抵抗力を受ける単振り子

<sup>\*1</sup> 土木建築工学科

ここで  $\tau = t/\sqrt{l/g}$  として無次元の変数  $\tau$  を導入する. この定義から  $\tau$  は時間を  $T/(2\pi) = \sqrt{l/g}$  を単位として測ったものとなる.  $T$  は振り子が外力や抵抗力を受けず, また触れ角  $\theta$  が小さいとしたときの振り子の周期を表す. さらに,

$$\gamma \equiv \frac{b}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \phi_0 \equiv \frac{F_0}{mg}, \quad \omega_D \equiv \sqrt{\frac{l}{g}}$$

で無次元の定数を導入する. その結果振り子の運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = \phi_0 \cos(\omega_D t) \quad (3)$$

と書き直すことができる<sup>2), 3)</sup>. ここでは再び  $\tau$  の代わりに  $t$  を用いた. もちろん,  $t$  は無次元の変数である.

この方程式を

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\gamma\omega - \sin\theta + \phi_0 \cos(\omega_D t) \end{cases} \quad (4)$$

と連立方程式の形に書き直し, 以後はこの式を用いて Runge-Kutta 法により計算を行った<sup>3), 4)</sup>. この場合のパラメーターは  $\gamma$ ,  $\omega_D$ ,  $\phi_0$  および初期条件  $\theta(0)$ ,  $\omega(0)$  である.

## 2. 2 計算結果

まず, 振り子の  $\theta - \omega$  位相空間内の軌跡の初期条件への依存性を調べた.  $\gamma = 0.25$ ,  $\omega_D = 2/3$ ,  $\phi_0 = 1.5$ ,  $\theta(0) = -0.8$  として,  $\omega(0)$  を 0.6, 0.7, 0.8 と変えて計算した結果を図 2 に示す. これら図は横軸に  $\theta$ , 縦軸に  $\omega$  をとって各時刻に相当する点をプロットしたもので, 位相平面図 ( $\theta - \omega$  図) とよばれるものである. この図では時間にして  $t = 0$  から 15 単位の間に対応する区間を図示している. これらの図からも分かるようにわずかな初期条件の違いによってその後の位相空間内の軌跡は全く違った様子を示す. なお, 図中で曲線が交差しているように見えるところもあるが, これは本来 3 次元の曲線を  $\theta - \omega$  平面に射影した結果であって, 実際には交差をしていない. もし, 交差するようなことがあれば, それは微分方程式の “uniqueness theorem” に反する.

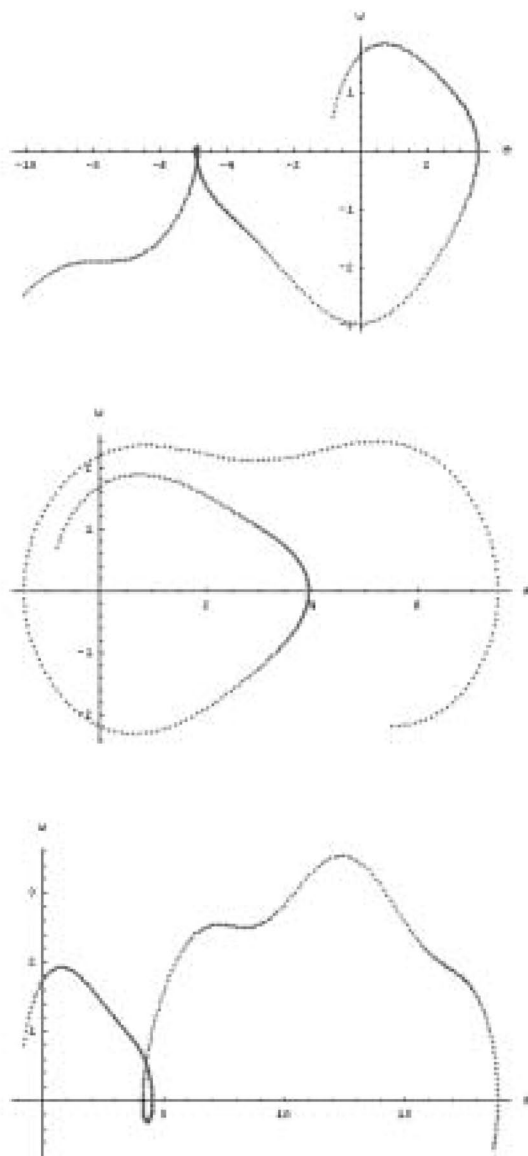


図 2. 初期条件  $\omega(0)$  の違いによる軌跡の変化  
上から順に  $\omega(0) = 0.6, 0.7, 0.8$  の各場合

次に, 振り子の  $\theta - \omega$  位相空間内の軌跡の外力の振幅  $\phi_0$  への依存性を調べた. ここでは  $\gamma = 0.5$ ,  $\omega_D = 2/3$ ,  $\theta(0) = \pi$ ,  $\omega(0) = 0$  として  $\phi_0$  を 0.97, 1.1, 1.15, 1.2 と変えて計算した結果を図 3 に示す.  $\phi_0 = 0.97$  あるいは  $\phi_0 = 1.1$  のときは初期の非定常状態を過ぎれば, ほぼ楕円状の定常状態に

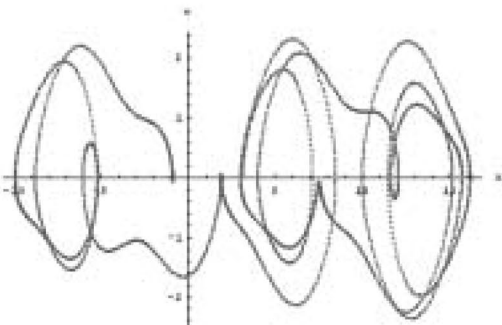
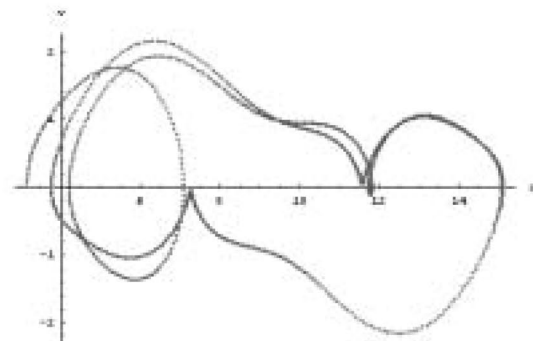
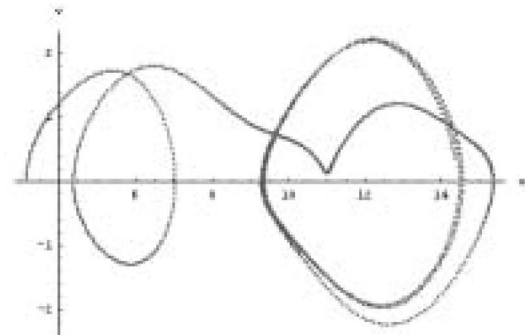
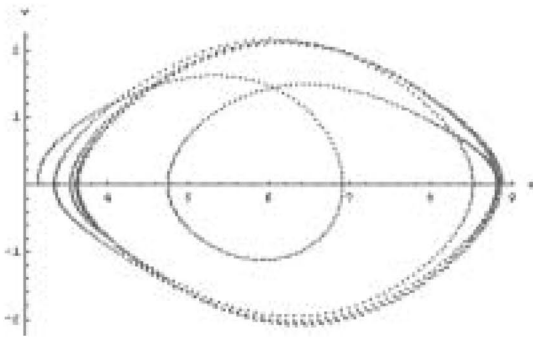


図-3.  $\phi_0$  の違いによる軌跡の変化  
上から順に  $\phi_0 = 0.97, 1.1, 1.15, 1.2$  の各場合

おちいる様子が見受けられる。しかしながら  $\phi_0$  の値が 1.2 あたりになると定常状態と呼べる軌跡に収束するようには見受けられない。この場合も初期条件の場合と同様に、わずかなパラメータの違いがその後の運動に大きく影響をしている様子がうかがえる。

### 3. Duffing 振動子

Duffing 振動子とは運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = a \cos(\omega_D t) \quad (5)$$

で記述される振動子である<sup>1),3)</sup>。ここに、 $\alpha, \beta$  は定数で  $\beta > 0$  である。この振動子の特徴は変位  $x$  の三乗に比例する力が働くことにある。この場合も方程式を次のように書き直す。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -2\gamma v - \alpha x - \beta x^3 + a \cos(\omega_D t) \end{cases} \quad (6)$$

非線型振動をする系に周期的な外力を加えた場合にも強制振動は起こるが、その様子は線形の場合に比べて大変複雑になる。そこで、ここでは  $x$  のおおよその振る舞いを見るために、 $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0.1, \omega_D = 0.1$  として  $a$  の値をいろいろ変えて Ruge-Kutta 法により計算を行った。初期条件として  $x(0) = v(0) = 0$  とした。これは、時刻 0 に原点に静止していた振り子に周期的な外力と減衰力が働き始めたことを想定している。得られた結果のうち代表的なものを  $x-v$  位相平面内の軌跡として図 4 に示す。これらの図においては、横軸は  $x$  を、縦軸は  $v$  を表す。初期の段階では運動が定常的でないのでプロットする範囲からは除外し、定常状態になってからの軌跡を図示してある。

これらの図からも読み取れるように、他のパラメータの値が同じであれば、 $a$  の値が大きくなるにつれて、軌跡は周期的ではあるが複雑な様相を示し、特に  $|x|$  が最大に近いところでは特に複雑な振る舞いをしているかのように見受けられる。参考のために、 $a = 20$  の場合の  $x-v-t$  3次元空間の軌跡を図 5 に示す。この図で  $t$  が 0 に近いところでは軌跡が乱れているが、これは初期の非定常状態の時間帯に相当する。

行った範囲内ではあるが、単振り子の位相空間内の軌跡は初期条件や、振り子が受ける外力の振幅

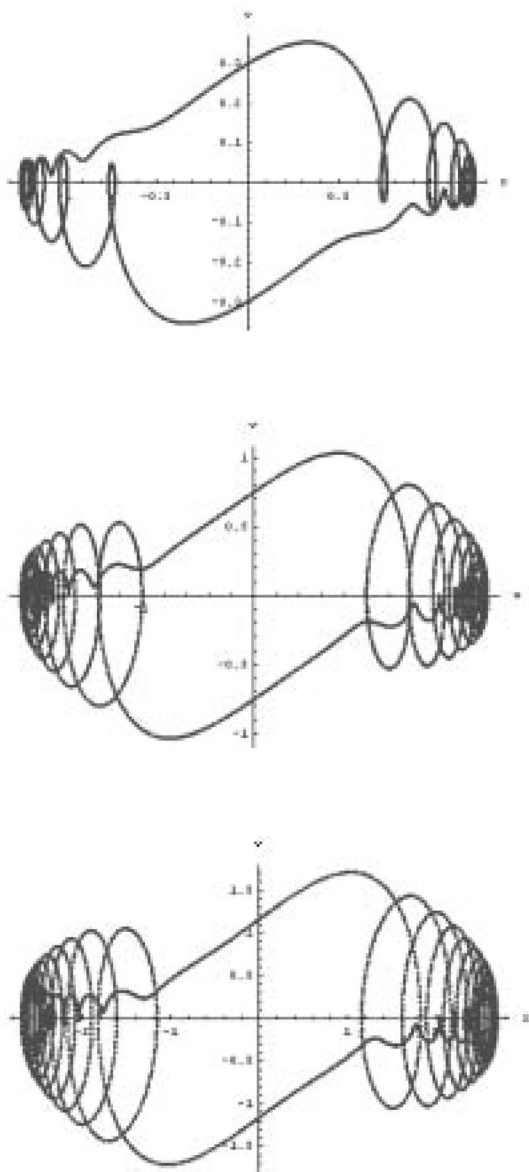


図-4. Duffing 振り子の  $x-v$  位相平面図  
上から順に  $a = 1, 10, 20$  の各場合

#### 4. 終わりに

周期的外力と減衰力を受ける単振り子と Duffing 振り子について、計算機実験を行った。その結果、我々が仮定したパラメーターで計算を

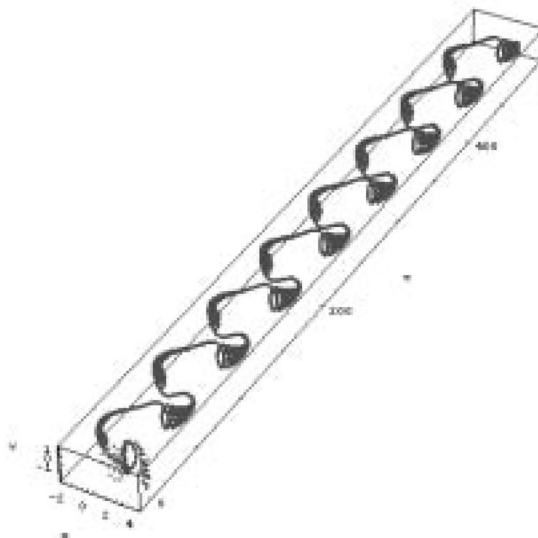


図-5.  $x-v-t$  3次元空間の軌跡 ( $a=20$ )

のわずかな違いに大きく依存する可能性があることが分かった。これについてはパラメーターの変化との関連をさらに系統的に調べる必要があると思われる。

また、Duffing 振り子の位相空間内の軌跡は初期の過渡的な時間を過ぎれば、かなり複雑ではあるが周期的な振る舞いをするのが観察された。今後はパラメーターの組み合わせを検討し、複雑な変化をする過程についても詳細に調べることも必要であろう。

#### 文 献

- 1) 有山 正孝：基礎物理学選書8 振動・波動，裳華房（1978）
- 2) Hassani, S.: *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields* (Springer-Verlag, New York) (2000)
- 3) Hassani, S.: *Mathematical Methods Using Mathematica For Students of Physics and Related Fields* (Springer-Verlag, New York) (2003)
- 4) 和田 昇：*Mathematica* による線形・非線型力学とカオスへの入門，サイエンス社（1996）

(2003.9.2 受理)