

[研究ノート]

## 非線形物理学におけるローレンツ系の導出について

<sup>1</sup>岸本 功, <sup>2</sup>金子 美咲, <sup>3</sup>小荒井 樹, <sup>4</sup>古堂 雅也

<sup>1</sup>山陽小野田市立山口東京理科大学共通教育センター,

<sup>2</sup>長岡市立栃尾南小学校,

<sup>3</sup>いわき市立小名浜第一小学校,

<sup>4</sup>福井県庁

## On a derivation of the Lorenz system in nonlinear physics

<sup>1</sup>Isao Kishimoto, <sup>2</sup>Misaki Kaneko, <sup>3</sup>Tatsuki Koarai, <sup>4</sup>Masaya Furudo

<sup>1</sup>Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University,

<sup>2</sup>Tochio-Minami Elementary School, Nagaoka City,

<sup>3</sup>Konahama-Daiichi Elementary School, Iwaki City,

<sup>4</sup>Fukui Prefectural Government

### 要 約

ローレンツ系は3変数に対する非線形な連立常微分方程式であり、比較的単純な式であるにもかかわらず、カオス的な振る舞いを示す解をもつことが知られている。ここでは、物理学の基礎方程式からローレンツ系を導出する過程についてレビューする。まずナビエ-ストークス方程式、連続の式、熱伝導方程式を適当な近似のもとで書き下す。そして、流体の下面の方が上面よりも高温であるという境界条件を課して、これらを静止解の周りで線形近似で解くと、熱対流を表す解が得られることを示す。次に、非線形項を取り入れ、適当な解の Ansatz と近似により、ローレンツ系が得られることを示す。これによりローレンツ系の変数の物理的意味を把握できる。

キーワード：非線形物理学, ローレンツ系, 流体力学

Keywords: nonlinear physics, Lorenz system, fluid mechanics

## 1. はじめに

カオスに関して、ローレンツ系は定番の話題である。これは 3 変数  $X, Y, Z$  に対する非線形であるが比較的単純な次の連立常微分方程式：

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ,\end{aligned}\quad (1)$$

与えられる。 $\sigma, r, b$  は定数であり  $\tau$  は時間に対応する。この方程式の静止解を求め、その周りで右辺をそれぞれ線形化することで、安定性を調べることができる。特に不安定となる場合に、適当な初期条件で非線形方程式を数値的に解くことで、カオス的な振舞いを観察することができる。数学的にはそれ自体興味深いことであるが、具体的にはどのような物理量の振舞いを表しているのだろうか。元々は気象学者ローレンツが調べた連立常微分方程式であるが、原論文 [1] にはその導出が丁寧には書かれていない。また、カオス関連の教科書にもローレンツ系自体の導出は記述されていない場合がある。<sup>\*1</sup> そこで、ここでは変数  $X, Y, Z$  が物理的に何を表す量なのかを理解するために、物理学の基礎方程式からの導出をなるべく自己充足した形で記述する。<sup>\*2</sup>

## 2. 基礎方程式と線形近似

流体の基礎方程式であるナビエーストークス方程式は、ニュートン流体に対し

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\right) \\ = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}\end{aligned}\quad (2)$$

与えられる。ここで、 $\rho, \mathbf{v}, p$  は流体の質量密度、速度、圧力、 $\mathbf{f}$  は流体にはたらく単位質量あたりの外力、 $\mu$  はずれ運動の粘性率、 $\zeta$  は体積粘性率である。また、質量の保存を表す連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

与えられる。

次に近似をしていく。まず、連続の式 (3) において、非圧縮流体の近似 ( $\rho \sim \text{定数}$ ) をして、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  とする。さらに、これを (2) に代入して右辺第 3 項を無視し、左辺の  $\rho$  は  $\rho_*$  (定数) で置き換え、右辺の外力  $\mathbf{f}$  を地表付近の重力加速度とする。鉛直上向きを  $y$  軸の正の

向きにとり、 $z$  軸方向の一様性を仮定して  $xy$  平面内の 2 次元の問題に帰着させる。流体速度  $\mathbf{v}$  の  $x, y$  成分を  $u, v$  とし、これらの近似をした (3), (2) は

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (4)$$

$$\rho_*(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u) = -\partial_x p + \mu \nabla^2 u, \quad (5)$$

$$\rho_*(\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v) = -\partial_y p + \mu \nabla^2 v - \rho g, \quad (6)$$

( $g$ : 重力加速度の大きさ) となる。(6) の右辺の  $\rho$  は温度  $T$  の関数で

$$\rho(T) = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*)) \quad (7)$$

とし、熱膨張率  $\alpha$  は定数とする。温度  $T$  についての熱伝導方程式<sup>\*3</sup>:  $\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T$  (左辺はラグランジュ微分:  $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ) は

$$\partial_t T + u \partial_x T + v \partial_y T = \kappa \nabla^2 T \quad (8)$$

となる。 $\kappa$  は熱拡散係数で定数とする。以下では、 $y=0$  と  $y=L$  ( $>0$ ) の間に流体があるとし、下面と上面ではそれぞれ温度が一定 (下面の方が高温) であるとして、上記の方程式を解いていく。

**静止解** 流体の下面  $y=0$  で温度  $T_1$ 、上面  $y=L$  で温度  $T_2$  ( $<T_1$ ) だとし、流体が静止している ( $u=v=0$ ) とすると、(8) の定常解  $T_0$  は、2 次元ラプラス方程式の境界条件を満たす解として与えられ

$$T_0(y) = T_1 - \beta y, \quad \beta \equiv \frac{\Delta T}{L}, \quad \Delta T \equiv T_1 - T_2, \quad (9)$$

となる。このときの密度  $\rho_0$  は (7) より

$$\rho_0(y) = \rho_*(1 - \alpha(T_1 - T_*) + \alpha\beta y) \quad (10)$$

となる。このとき (5) より  $\partial_x p = 0$  なので、圧力  $p_0$  は (6) から  $\frac{dp_0}{dy} + \rho_0(y)g = 0$  を  $y$  で積分して得られ

$$p_0(y) = p_1 - \rho_* g \left( -\alpha(T_1 - T_*) + \frac{\alpha\beta}{2} y \right) y \quad (11)$$

となる。下面での圧力を  $p_1$  とした。

**静止解からの微小変動** 上で求めた静止解 ( $\mathbf{v}=0$  および (9), (10), (11)) から  $\mathbf{v} = (u, v)$ ,  $T = T_0(y) + \theta$ ,  $p = p_0(y) + p'$ ,  $\rho = \rho_0(y) + \rho'$  のように微小な変動が加わったとして、 $u, v, \theta, p', \rho'$  について 2 次以上の項を無視する線形近似をすると、(5), (6), (7), (8) からそれぞれ

$$\partial_t u = -\rho_*^{-1} \partial_x p' + \nu \nabla^2 u, \quad (12)$$

$$\partial_t v = -\rho_*^{-1} \partial_y p' + \nu \nabla^2 v - g \rho' \rho_*^{-1}, \quad (13)$$

$$\rho' = -\alpha \rho_* \theta, \quad (14)$$

$$\partial_t \theta - \beta v = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (15)$$

( $\nu \equiv \mu \rho_*^{-1}$ ) となる。(12) を  $y$  で偏微分し、(13) を  $x$  で偏微分して引くと、渦度  $\omega = \partial_x v - \partial_y u$  に対する微分方程式:  $\partial_t \omega - \nu \nabla^2 \omega = g \alpha \partial_x \theta$  (16)

が得られる。一方、(4) より、ストークスの定理から、

流れの関数  $\psi$  が存在して

$$u = \partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi \quad (17)$$

と表せる。このとき,  $\omega = -\nabla^2 \psi$  より (16) は

$$\partial_t \nabla^2 \psi - \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi = -g\alpha \partial_x \theta \quad (18)$$

となり, (15) は

$$\partial_t \theta - \kappa \nabla^2 \theta = -\beta \partial_x \psi \quad (19)$$

となる。さらに  $(x, y) = L (x', y')$ ,  $t = L^2 \kappa^{-1} t'$ ,  $\psi = \kappa \psi'$ ,  $\theta = \beta L \theta'$  として,  $x, y, t, \psi, \theta$  の代わりに, 無次元化した  $x', y', t', \psi', \theta'$  を用いると (18), (19) は

$$(\sigma^{-1} \partial_t' - \nabla'^2) \nabla'^2 \psi' = -R_a \partial_x' \theta', \quad (20)$$

$$(\partial_t' - \nabla'^2) \theta' = -\partial_x' \psi' \quad (21)$$

となる。ここで

$$R_a = \frac{g\alpha\beta L^4}{\kappa\nu}, \quad \sigma = \frac{\nu}{\kappa} \quad (22)$$

はそれぞれレイリー数, プラントル数と呼ばれる無次元数である。(21) を  $x'$  で偏微分し, (20) を代入して  $\theta'$  を消去すると

$$(\partial_t' - \nabla'^2)(\sigma^{-1} \partial_t' - \nabla'^2) \nabla'^2 \psi' = R_a \partial_x'^2 \psi' \quad (23)$$

となる。(23), (20), (21) を自由境界条件:

$$y = 0, L \text{ で } \psi = \partial_y^2 \psi = \theta = 0 \quad (24)$$

のもとで解こう。境界条件を満たす

$$\begin{aligned} \psi' &= A e^{\gamma t'} \sin \pi a x' \sin \pi y', \\ \theta' &= B e^{\gamma t'} \cos \pi a x' \sin \pi y', \end{aligned} \quad (25)$$

という解の Ansatz をとる。(23), (20), (21) に代入すると, それぞれ

$$\begin{aligned} (\gamma + N^2)(\sigma^{-1} \gamma + N^2) N^2 &= R_a (\pi a)^2, \\ N^2 &\equiv \pi^2 (a^2 + 1), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -(\sigma^{-1} \gamma + N^2) N^2 A &= R_a B \pi a, \\ (\gamma + N^2) B &= -A \pi a, \end{aligned} \quad (27)$$

となる。特に, (26) は  $\gamma$  の 2 次方程式で次の形の解  $\gamma = \gamma_{\pm}$  をもつ:

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} &= \frac{-N^2(\sigma + 1) \pm \sqrt{D}}{2}, \\ D &= N^4(\sigma + 1)^2 - 4\sigma N^4 \left(1 - \frac{R_a}{R_c}\right) \\ &= N^4(\sigma - 1)^2 + 4\sigma N^4 \frac{R_a}{R_c}. \end{aligned} \quad (28)$$

ここで

$$R_c = \frac{N^6}{(\pi a)^2} = \frac{\pi^4}{a^2} (a^2 + 1)^3 \quad (29)$$

は臨界レイリー数と呼ばれる。判別式  $D$  は (28) より正なので  $\gamma_{\pm}$  は実数である。また, 常に  $\gamma_- < 0$  であるが,  $\gamma_+$  の符号はレイリー数の値により異なる:

$$\begin{aligned} R_a > R_c \text{ のとき } \gamma_+ &> 0, \\ R_a = R_c \text{ のとき } \gamma_+ &= 0, \\ R_a < R_c \text{ のとき } \gamma_+ &< 0. \end{aligned} \quad (30)$$

一方, 解の形 (25) から,  $\gamma < 0$  ならば時間が経過すると  $\psi, \theta$  がともに小さくなる。これは静止解が安定であることを意味する。逆に,  $\gamma > 0$  の場合, 時間が経過すると  $\psi, \theta$  の絶対値がともに大きくなり, 線形近似が妥当でなくなる。 $\gamma = 0$  はその境目であり,  $\gamma \geq 0$  では静止解が不安定であることを意味する。 $\gamma_+$  の符号から,  $R_a \geq R_c$  では (25) の形で表される対流セル (ロール型対流) の発生が可能となる。

なお,  $R_c$  は  $a = 1/\sqrt{2}$  のとき最小値  $27\pi^4/4$  となるので, 温度差  $\Delta T$  が少しずつ大きくなって最初に対流が発生するのは  $a = 1/\sqrt{2}$  でレイリー数が  $27\pi^4/4$  となる場合, ということになる。また,  $\gamma$  が決まったとき, (27) より, (25) における係数  $A$  と  $B$  の比が  $A/B = -(\gamma + N^2) / (\pi a)$  により決まる。

$\gamma = 0, a = 1/\sqrt{2}, L = 1$  の場合, 流体の速度場  $\mathbf{v} = (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)$  を図示すると図 1 のようになり, 対応する温度変化  $\theta$  は図 2 のようになる。

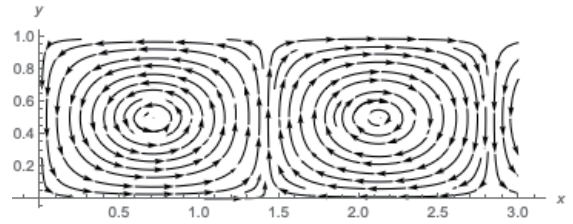


図 1 速度場の様子

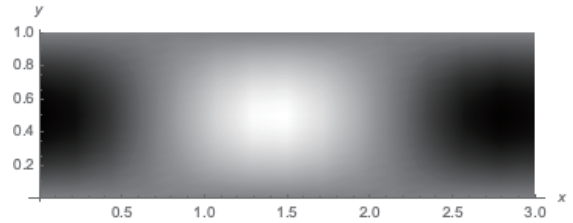


図 2 温度変化の様子 (グレースケールで明るい部分の温度が高い)

### 3. ローレンツ系

次に, (5), (6), (7), (8) に非線形性を取り入れて解こう。まず, (4) から, ストークスの定理より (17) のように書ける。(5) より  $v = \mu \rho_*^{-1}$  として

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_y \psi + \partial_y \psi \partial_x \partial_y \psi - \partial_x \psi \partial_y^2 \psi \\ = -\rho_*^{-1} \partial_x p + \nu \nabla^2 \partial_y \psi \end{aligned} \quad (31)$$

となり, (6) より,

$$\begin{aligned} -\partial_t \partial_x \psi - \partial_y \psi \partial_x^2 \psi + \partial_x \psi \partial_x \partial_y \psi \\ = -\rho_*^{-1} \partial_y p - \nu \nabla^2 \partial_x \psi - g \rho_*^{-1} \rho. \end{aligned} \quad (32)$$

(31) を  $y$  で偏微分し, (32) を  $x$  で偏微分して引くと

$$\begin{aligned} \nabla^2 \partial_t \psi + \partial_y \psi \nabla^2 \partial_x \psi - \partial_x \psi \nabla^2 \partial_y \psi \\ = v \nabla^2 \nabla^2 \psi + g \rho_*^{-1} \partial_x \rho \end{aligned} \quad (33)$$

となるが、温度を

$$T = T_0(y) + \theta = T_1 - \beta y + \theta \quad (34)$$

とすると (7) から  $\partial_x \rho = -\rho_* \alpha \partial_x \theta$  となるので

(33) は

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla^2 \psi + (\partial_y \psi \partial_x - \partial_x \psi \partial_y) \nabla^2 \psi \\ = v \nabla^2 \nabla^2 \psi - g \alpha \partial_x \theta \end{aligned} \quad (35)$$

となる。(17), (34), (8) から

$$\partial_t \theta + (\partial_y \psi \partial_x - \partial_x \psi \partial_y) \theta + \frac{\Delta T}{L} \partial_x \psi = \kappa \nabla^2 \theta \quad (36)$$

が得られる。線形近似解 (ロール型対流) の Ansatz (25) を踏まえて、ローレンツの解の Ansatz:

$$\psi = -X(t)A \sin \frac{\pi ax}{L} \sin \frac{\pi y}{L}, \quad (37)$$

$$\theta = Y(t)\sqrt{2}B \cos \frac{\pi ax}{L} \sin \frac{\pi y}{L} - Z(t)B \sin \frac{2\pi y}{L}, \quad (38)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}(a^2 + 1)\kappa}{a}, \quad B = \frac{\Delta T R_c}{\pi R_a} \quad (39)$$

の形を仮定して (35), (36) を近似的に解こう。ここでレイリー数  $R_a$  とその臨界値  $R_c$  は (22), (9), (29) から

$$R_a = \frac{g\alpha L^3 \Delta T}{v\kappa}, \quad R_c = \frac{\pi^4(a^2 + 1)^3}{a^2} \quad (40)$$

である。(37), (38) を (35) に代入すると、

$\sin \frac{\pi ax}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$  の係数から

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2(a^2 + 1)}{L^2} \frac{dX}{dt} A \\ = -v \frac{\pi^4(a^2 + 1)^2}{L^4} XA + g\alpha \frac{\pi a}{L} Y\sqrt{2}B \end{aligned} \quad (41)$$

が得られる。(37), (38) を (36) に代入し、

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi y}{L} \cos \frac{\pi y}{L} = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi y}{L}, \\ \sin \frac{\pi y}{L} \cos \frac{2\pi y}{L} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi y}{L} + \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi y}{L}, \end{aligned} \quad (42)$$

に注意すると、 $\cos \frac{\pi ax}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$  の係数から

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} \sqrt{2}B \\ = \frac{\pi a \Delta T}{L^2} XA - \frac{\pi^2(a^2 + 1)}{L^2} \kappa Y \sqrt{2}B - \frac{\pi^2 a}{L^2} XZAB \end{aligned} \quad (43)$$

が得られ、 $\sin \frac{2\pi y}{L}$  の係数から

$$\frac{dZ}{dt} (-B) = -\frac{\pi^2 a}{\sqrt{2}L^2} XYAB + \frac{4\pi^2}{L^2} \kappa ZB \quad (44)$$

が得られる。ここで  $\cos \frac{\pi ax}{L} \sin \frac{3\pi y}{L}$  の項は  $y$  方向のフーリエ展開の高次の項に相当するので無視した。(41), (43), (44) を (39), (40) を用いて整理することにより、ローレンツ系の非線形常微分方程式 (1) が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\pi^2(a^2 + 1)\kappa}{L^2} t, \quad \sigma = \frac{v}{\kappa}, \\ r = \frac{R_a}{R_c}, \quad b = \frac{4}{a^2 + 1} \end{aligned} \quad (45)$$

である。なお、(37), (38) より  $AX$  は  $(x, y) = (0, L/2)$  における  $y$  方向の流体速度  $v = -\partial_x \psi$  の  $L/(\pi a)$  倍、 $\sqrt{2}BY$  は  $(x, y) = (0, L/2)$  における静止解からの温度変化、 $BZ$  は  $(x, y) = (L/(2a), 3L/4)$  における静止解からの温度変化を表している。

#### 4. おわりに

本稿では流体力学の基礎方程式からローレンツ系 (1) が出てくる過程を記述した。これにより、カオスの振る舞いを示す変数  $X, Y, Z$  の物理的な意味が明らかになった。 $X, Y, Z$  は、上面よりも下面の方が温度が高く水平方向のある 1 方向については一様な流体に関する、流れの関数と温度変化について、(37), (38) の形の Ansatz をとる時に導入されるものである。これは、線形近似解との比較から、大雑把には図 1, 図 2 のようなロール型の対流の時間変化を表すものと解釈できるであろう。

ローレンツ系 (1) を数値的に解いて、その振る舞いを具体的に調べることは、カオス関連の教科書でよく見られるものであり、パソコン上で比較的手軽に実行できる。本稿の著者らも、実際に 4 次のルンゲクッタ法で解いて図示してみた。しかし、対応する物理量 (流体速度と温度変化) を実験で測定し、数値計算の結果と比較してみることは簡単ではないだろう。

#### 謝辞

新潟大学オープンキャンパス 2018 で、教育学部理科教育専修のポスター展示\*4 にご協力いただいた、高清水康博氏、佐藤優希氏、渡部文都氏に感謝します。

#### 注

\*1. 新潟大学教育学部における 2018 年度卒業研究で、文献 [2] に基づきカオスについて学んでいたところ、ローレンツ系の導出の説明は概略のみだったため詳しい文献を探した。

- \*2. 基礎方程式については [3] を参照し、ローレンツ系の導出の詳細については [4] を参照した。
- \*3. 拡散方程式： $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$  の左辺に流体の運動による効果を取り入れた形。これは次のように、エネルギーの式 [3]： $\rho \frac{DE}{Dt} = \Phi - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q$  から導出できる。ここで、 $E$ ：単位質量あたりのエネルギー、 $Q$ ：流体中の熱源による発熱、 $k$ ：熱伝導率であり、粘性散逸関数  $\Phi$  はトレースレスな歪み速度テンソル： $e'_{ij} = (\partial_j v_i + \partial_i v_j) / 2 - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} / 3$  を用いて  $\Phi = \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu (e'_{ij})^2$  で与えられる。エネルギーの式は熱力学的関係式： $dE = TdS - pd(\rho^{-1})$  ( $S$ ：単位質量あたりのエントロピー) と (3) から  $\rho T \frac{DS}{Dt} = \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q$  と書き直せる。さらに、流体中に熱源がない ( $Q=0$ ) として、流体が等圧的に熱を得る [4] とすると、

定圧比熱  $c_p$  を用いて  $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T)$  となる。速度の微分の 2 乗と粘性率からなる  $\Phi$  を無視し、 $k$  を定数とし  $\kappa = k / (\rho c_p)$  とすると本文中の  $T$  に関する方程式が得られる。

- \*4. 本稿の内容の要約とローレンツ系のカオスの振舞いの数値計算による図示について、ポスターを作成し発表した。(2018年8月9,10日)

### 参考文献

- [1] Edward N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130
- [2] 十河清：非線形物理学－カオス・ソリトン・パターン－，裳華房，2010
- [3] 川原琢治：連続体力学，産業図書，1996
- [4] 神部勉，石井克哉：流体力学，裳華房，1995