

[エッセイ]

微分積分学基礎教育における複素数と オイラーの公式の積極的な利活用について

見山 友裕

山陽小野田市立山口東京理科大学 共通教育センター

Utilization of complex number and Euler's formula on the education of calculus

Tomohiro MIYAMA

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

要 約

私は本学において長らく1年生を対象とした「微分積分学および演習」「工学数学および演習」を担当してきましたが、この両科目では実数の範囲の微分、積分を扱い、そこに複素数の要素が入ってくることはほとんどありません。ただ使用している教科書¹⁾の最後の章で定数係数2階微分方程式の解の説明(最近発売されている微分積分の教科書では、微分方程式まで扱われている微分積分の教科書はほとんど見かけません)でオイラーの公式が出現し、微分方程式の解に複素数の解が現れます。ご存じのようにオイラーの公式はその後の専門教育では頻繁に出てくる重要な式ではありますが、複素数を扱う数学となると「複素関数論」という別の科目として扱われ、複素空間から始まり、複素積分までの範囲までと1年生にとっては難しい内容であり、応用化学科ではこのような科目は開講されていません。しかし現在ある微分積分学の内容に複素数の虚数単位である i を特殊な性質を持った係数として扱うだけで、複素関数論で扱うような難しい内容とする必要はなく、三角関数の加法定理や微積分、マクローリン展開や各種の微分積分の公式が理解できると考えます。本論文(エッセイ)ではオイラーの公式および複素数を含めた各種の微分積分から始め、減衰振動の現象などの応用までについて思いついたまま記述していきます。

キーワード: 微分積分学、複素数、オイラーの公式

Key Words : calculus, complex number, Euler's formula

1. オイラーの公式

18世紀の数学者レオンハルト・オイラーが見出した公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad i \text{は虚数単位}$$

は、指数関数を通して、複素数の世界と三角関数の世界を結びつけるものです。この式から $e^{i\pi} + 1 = 0$ が得られますが、この式には数字の基礎、0と1および超越数 e, π が虚数単位を通して結びつけられており、世界で一番美しい公式と呼ばれています。

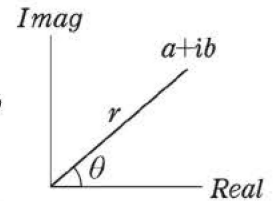
2. オイラーの公式を用いた各種の公式の導出

(1) 三角関数の加法定理

複素平面において

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\} = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

r : 絶対値 θ : 偏角



2つの複素数 $\alpha = r_1 e^{i\theta_1} = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $\beta = r_2 e^{i\theta_2} = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対して

これら2つの複素数の積は

$$\alpha\beta = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

一方、実際に積を行うことにより

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \end{aligned}$$

が得られます。両者の実部、虚部の比較により

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

が得られ、三角関数の加法定理が証明されます。高校では加法定理は図を用いて証明されることが一般的です。

2つの複素数の商により

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

一方、実際に商の計算を行うことにより

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \end{aligned}$$

が得られます。両者の実部、虚部の比較により

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

が得られます。

(2) マクローリン展開

指数関数 e^x のマクローリン展開 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$ において
変数 x の箇所に純虚数 ix を代入すると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots \right) + i \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots \right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となり、三角関数のマクローリン展開の式を得ることができます。

(3) 指数部が複素数である指数関数の微分・積分

(i) $f(x) = e^{(a+ib)x}$ (a, b : 実数) の微分

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = \frac{d}{dx} \{ e^{ax} \cdot e^{ibx} \} = \left(\frac{d}{dx} e^{ax} \right) \cdot e^{ibx} + e^{ax} \cdot \left(\frac{d}{dx} e^{ibx} \right)$$

$$\text{ここで } \frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ibx} = \frac{d}{dx} \{ \cos bx + i \sin bx \} = -b \sin bx + ib \cos bx = ib \{ i \sin bx + \cos bx \} = ibe^{ibx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (ae^{ax}) \cdot e^{ibx} + e^{ax} \cdot (ibe^{ibx}) = ae^{(a+ib)x} + ibe^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$$

となり公式 $\frac{d}{dx} e^{px} = pe^{px}$ $p = a + ib$: 任意の複素数が得られます。これは教科書¹⁾にも証明が書かれています。

(ii) $f(x) = e^{(a+ib)x}$ (a, b : 実数) の積分

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int e^{(a+ib)x} dx = \int e^{ax} \{ \cos(bx) + i \sin(bx) \} dx = \int e^{ax} \cos(bx) dx + i \int e^{ax} \sin(bx) dx \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \{ a \cos(bx) + b \sin(bx) \} + i \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \{ a \sin(bx) - b \cos(bx) \} \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \{ \cos(bx) + i \sin(bx) \} - ib \{ \cos(bx) + i \sin(bx) \}] \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \{ \cos(bx) + i \sin(bx) \} \{ a - ib \} = \frac{e^{ax}}{a + ib} e^{ibx} = \frac{e^{(a+ib)x}}{a + ib} \end{aligned}$$

ゆえに $\int e^{px} dx = \frac{e^{px}}{p}$ $p = a + ib$ 任意の複素数が得られます。

上記の証明において $\int e^{ax} \cos(bx) dx$, $\int e^{ax} \sin(bx) dx$ の積分の過程を省略していますが、教科書では部分積

分の例題として多くの問題が書かれています。

(4) $e^{mx} \cos nx$, $e^{mx} \sin nx$ の微分・積分について

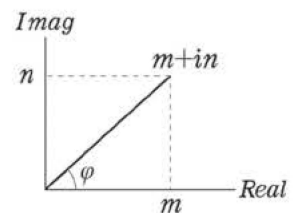
オイラーの公式を利用するために

$$\begin{aligned} f(x, m, n) &= e^{mx} \cos nx + ie^{mx} \sin nx = e^{mx} (\cos nx + i \sin nx) \\ &= e^{mx} e^{inx} = e^{m+in} x = e^{(m+in)x} \end{aligned}$$

とおきます。ここでパラメータ m, n について

$$m + in = \sqrt{m^2 + n^2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} + i \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right) = \sqrt{m^2 + n^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{m^2 + n^2} e^{i\varphi}$$

とおきます。ただし、 $\cos \varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$, $\sin \varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$



(i) 微分

$$\begin{aligned} \frac{df(x, m, n)}{dx} &= \frac{de^{(m+in)x}}{dx} = (m + in) e^{(m+in)x} = \left(\sqrt{m^2 + n^2} e^{i\varphi} \right) e^{mx} e^{inx} \\ &= \sqrt{m^2 + n^2} e^{mx} e^{i(nx+\varphi)} = \sqrt{m^2 + n^2} e^{mx} \{ \cos(nx + \varphi) + i \sin(nx + \varphi) \} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d\{e^{mx} \cos nx\}}{dx} = \sqrt{m^2 + n^2} e^{mx} \cos(nx + \varphi), \quad \frac{d\{e^{mx} \sin nx\}}{dx} = \sqrt{m^2 + n^2} e^{mx} \sin(nx + \varphi)$$

となり、微分により大きさが $\sqrt{m^2 + n^2}$ 倍、位相が φ (rad) ほど進む事がわかります。

(ii)積分

$$\begin{aligned} \int f(x, m, n) dx &= \int e^{(m+in)x} dx = \frac{e^{(m+in)x}}{m+in} = \frac{e^{mx} e^{inx}}{\sqrt{m^2 + n^2} e^{i\varphi}} = \frac{e^{mx}}{\sqrt{m^2 + n^2}} e^{i(nx-\varphi)} \\ &= \frac{e^{mx}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \{\cos(nx - \varphi) + i \sin(nx - \varphi)\} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \int e^{mx} \cos nx dx = \frac{e^{mx}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \cos(nx - \varphi), \quad \int e^{mx} \sin nx dx = \frac{e^{mx}}{\sqrt{m^2 + n^2}} \sin(nx - \varphi) \text{ となり}$$

積分により大きさが $1/\sqrt{m^2 + n^2}$ 倍となり、位相が φ (rad) ほど遅れる事がわかります。

(5)応用例:平面内運動について

バネの振動のように減衰振動となる運動を考えると、これを複素平面内の運動として問題を解くことが可能です。

原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\sigma t}$, 方位 $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \omega t$ の運動をする時、複素位置ベクトル

$$\mathbf{x} = x + iy = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + i e^{\sigma t} \sin(\omega t) = e^{\sigma t} e^{i\omega t} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\mu t} \quad \mu = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{i\delta}$$

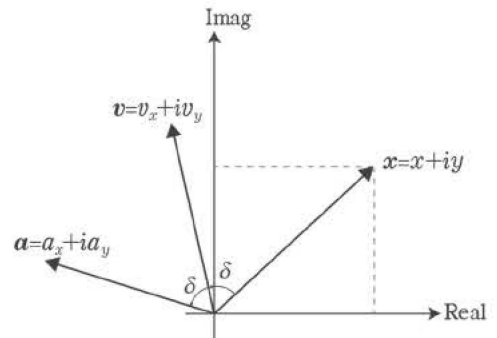
を考える ($\sigma < 0$ のとき減衰振動となる) と、速度ベクトル $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ 、加速度ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ は、上記(4)の計算と同様に求めることができ、

$$\text{複素速度ベクトル } \mathbf{v} = v_x + iv_y = (\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{i\delta}) * e^{\mu t},$$

複素加速度ベクトル

$$\mathbf{a} = a_x + ia_y = (\sqrt{\sigma^2 + \omega^2})^2 e^{\mu t + i2\delta} = (\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{i\delta})^2 * e^{\mu t}$$

と求めることができます。減衰振動 ($\sigma < 0, \delta > \pi/2$) はこれらベクトルの実数軸または虚数軸への射影として求めることができます。



まとめ

紙面の関係で簡単な例のみについて述べてきましたが、複素数とオイラーの公式を利用することにより計算が簡単に行え、学生の微分積分学の理解に有効であろうと結論することができます。

参考文献

1. 「理工系入門 微分積分」石原繁、浅野重初共著 裳華房