

[研究ノート]

開弦の場の理論におけるツイスト偶のユニバーサルな a-ゲージ解の低レベルでの振る舞いについて

岸本 功

山陽小野田市立山口東京理科大学 共通教育センター

On Behavior of the Twist-Even Universal Solutions in a-gauge at Low Level in Open String Field Theory

Isao KISHIMOTO

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

Abstract

In open string field theory, we performed numerical calculations with the level truncation approximation method in a-gauge for “double brane” and “ghost brane” solutions in addition to the tachyon vacuum solution in the previous work. These solutions were constructed from one of the solutions in the Siegel gauge at the truncated level 0, 2, and 4, respectively, up to truncated level 20, and their gauge invariants were evaluated for various values of a including $a=\infty$, which corresponds to the Landau gauge. Although these are obtained by restricting the space of string fields to the space spanned by the twist-even universal states, some solutions other than the tachyon vacuum and “double brane” solutions exist at the second lowest truncated level. Here, we evaluate gauge invariants for them and study their behavior. Namely, at the truncated level two, starting from all solutions obtained in $a=0$ or $a=\infty$ gauge, we construct numerical solutions in various a-gauges by varying the values of a gradually and describe their gauge invariants. Our results might become useful for constructing new physically meaningful solutions at the large truncated level limit.

Key words: open string field theory, a-gauge condition, level truncation approximation, numerical solutions

キーワード: 開弦の場の理論, a-ゲージ条件, レベル切断近似, 数値解

1. はじめに

開弦場 Ψ に対し、作用が

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

で与えられるボソンの開弦の場の理論はゲージ不変性を持つため、この運動方程式

$$Q_B \Psi + \Psi * \Psi = 0$$

を数值的に解く際は、ゲージ固定条件を課す。多くの場合、 $b_0|\Psi\rangle=0$ というSiegelゲージ条件が課される。このゲージ条件は簡単な式であり、かつ、各レベル毎に課せるため数値計算でよく用いられているレベル切断近似に適している。文献[AK(2006a)]¹⁾では、Siegelゲージを1パラメータ a を含んで拡張した

$$(-2J_+ b_0 + a\tilde{Q} b_0 c_0)|\Psi\rangle = 0$$

のように表される a -ゲージ条件が導入された。ここで、 J_+ 、 \tilde{Q} は、BRST演算子 Q_B をゴーストゼロモード c_0 、 b_0 で展開した際、

$$Q_B = c_0 L_0 - 2b_0 J_+ + \tilde{Q}$$

のように現れるものである。 a -ゲージ条件は $a=0$ のときSiegelゲージ条件と等価になり、 $a=\infty$ (Landauゲージに相当)の場合は $\tilde{Q} b_0 c_0 |\Psi\rangle=0$ という条件となる。(ただし、 $a=1$ の場合は摂動的には良い条件ではない。) a -ゲージ条件もSiegelゲージと同様にレベル毎に課せるため、レベル切断近似に適しており、まずは文献[AK(2006b)]²⁾で数值的タキオン真空解を調べるのに用いられた。しかしながら、Siegelゲージと比較して条件式が煩雑なこともあり、これまで数値計算で用いられることは少なかった。そこで、我々は文献[KT(2009)]³⁾、[K(2021)]⁴⁾などの研究で、より高いレベルまでの数値計算を行った。その結果、タキオン真空解については、様々な a の値の a -ゲージの解が存在し、ゲージ対称性と整合していることがわかった。[K(2021)]⁴⁾では、文献[KS(2018)]⁵⁾で提唱されたSiegelゲージの数值的「二重ブレーン」解および「ゴーストブレーン」解を、それぞれ a -ゲージの解に拡張するとどのように振る舞うのか、レベル切断近似を用いて調べた。その結果、 a -ゲージ条件の a の値を $a=0$ (Siegelゲージ)から少しずつ変えていくと、途中からゲージ不変量の値が変わることが観測された。これから、理論のゲージ対称性より、途中から物理的に別の意味を持つ解に移ることが予想される。ただし、そもそもSiegelゲージの「二重ブレーン」解・「ゴーストブレーン」解を文字通り二重ブレーン・ゴーストブレーンと解釈して良いのか、ということも現時点でははっきりしていないと思われるため、様々な a -ゲージの解がそれぞれ何を表す解なのかを明らかにするためには、今後詳しく調べる必要がある。数値

的タキオン真空解、「二重ブレーン」解、「ゴーストブレーン」解及びこれらを a -ゲージに拡張したものはいずれもツイスト偶のユニバーサルな状態空間内で構成される。これと同じ状態の空間の基底で展開したとき、最も低い切断レベル0の解はタキオン真空解しかないが、2番目に低い切断レベル2の解はタキオン真空解と「二重ブレーン」解の他にも解が存在する。本稿では、この切断レベル2の a -ゲージの数値解を求め、ゲージ不変量等を計算した結果を示す。本来の運動方程式の解は切断レベルを無限大としなければならぬので、さらにレベル依存性を調べる必要があり、これには膨大な数値計算が必要となるが、低レベル近似での解の振る舞いを調べておくことは、物理的に意味のある新たな数値解を発見するための準備になると期待する。

2. 切断レベル2の解とゲージ不変量

ツイスト偶のユニバーサルな基底で展開された開弦場の空間は、切断レベル2では3次元である。開弦の場の理論の実条件を課せば、3つの実係数からなる実3次元空間を考えるべきだが、ここでは[KS(2018)]⁵⁾に倣って複素係数に拡張して複素3次元の空間で解を求める。実際、[KS(2018)]⁵⁾の「二重ブレーン」は切断レベル2で複素解⁶⁾として得られている。以下では2通りの方法で構成した a -ゲージの解について記述する。一つは、 $a=0$ (Siegelゲージ)で解いて求めた6つの解($\Psi_R, \Psi_T, \Psi_D, \Psi_{D^*}, \Psi_C, \Psi_{C^*}$)を出発点とし、 $a \rightarrow a + \Delta a$ のように a を少しずつ変えて $|a|=1$ まで解を求めていく。これらを $\Psi_R(a), \Psi_T(a), \Psi_D(a), \Psi_{D^*}(a), \Psi_C(a), \Psi_{C^*}(a)$ と表す。(特に Ψ_T はタキオン真空解、 Ψ_D は「二重ブレーン」解である。) もう一つは、 $a=\infty$ (Landauゲージ)で解いて求めた7つの解($\Psi_{\hat{C}}, \Psi_{\hat{R}}, \Psi_{\hat{T}}, \Psi_{\hat{C}^*}, \Psi_{\hat{C}^*}, \Psi_{\hat{D}}, \Psi_{\hat{D}}$)を出発点とし、 $\hat{a} \rightarrow \hat{a} + \Delta \hat{a}$ のように $\hat{a} \equiv 1/a$ を少しずつ変えて $|\hat{a}|=1$ まで解を求めていく。これらを $\Psi_{\hat{C}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{R}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{T}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{C}^*}(\hat{a}), \Psi_{\hat{C}^*}(\hat{a}), \Psi_{\hat{D}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{D}}(\hat{a})$ と表す。このようにして²⁾得られた解 Ψ に対し、それぞれゲージ不変量であるエネルギー E とゲージ不変オーバーラップ E_0 :

$$E[\Psi] = 1 - 2\pi^2 g^2 S[\Psi], \quad E_0 = 1 - 2\pi \langle I|V|\Psi \rangle$$

を評価した結果が図1, 図2, ..., 図8である。 E, E_0 ともに、Dブレーン1枚を表す自明な解($\Psi=0$)で1, Dブレーン0枚を表すタキオン真空解で0となるように規格化した。

特に、各 a -ゲージ解の構成の出発点とした $a=0$ (Siegelゲージ)の解: $\Psi_R, \Psi_T, \Psi_D, \Psi_{D^*}, \Psi_C, \Psi_{C^*}$ での値を表1に、 $\hat{a}=1/a=0$ つまり $a=\infty$ (Landauゲージ)の解: $\Psi_{\hat{C}}, \Psi_{\hat{R}}, \Psi_{\hat{T}}, \Psi_{\hat{C}^*}, \Psi_{\hat{C}^*}, \Psi_{\hat{D}}, \Psi_{\hat{D}}$ での値を表2にまとめた。

表 1: $a=0$ (Siegelゲージ) の解の E, E_0

解	E	E_0
Ψ_R	-812.284	-15.4371
Ψ_T	0.0406234	0.110138
Ψ_D	$-1.42791 - 3.40442i$	$2.00934 - 0.0545341i$
Ψ_{D^*}	$-1.42791 + 3.40442i$	$2.00934 + 0.0545341i$
Ψ_C	$-132.354 - 18.1143i$	$-2.20507 + 0.391766i$
Ψ_{C^*}	$-132.354 + 18.1143i$	$-2.20507 - 0.391766i$

表 2: $a=\infty$ (Landauゲージ) の解の E, E_0

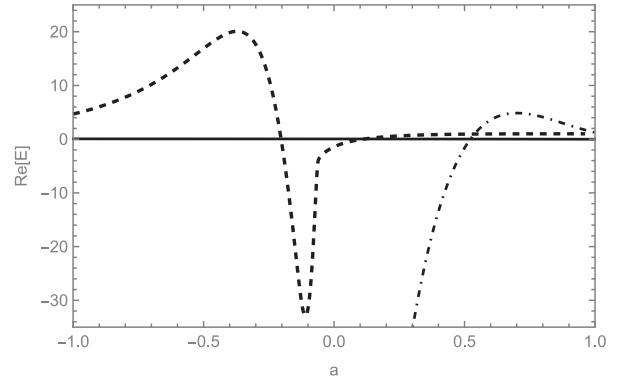
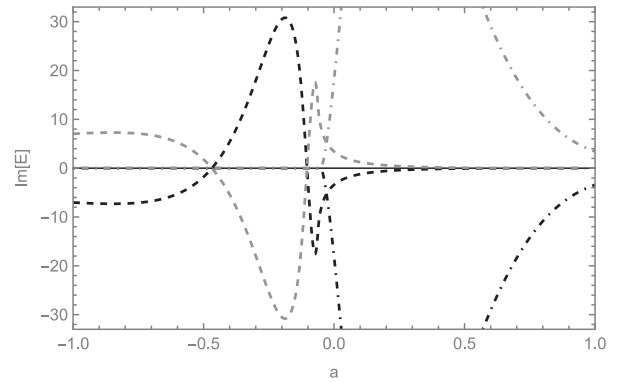
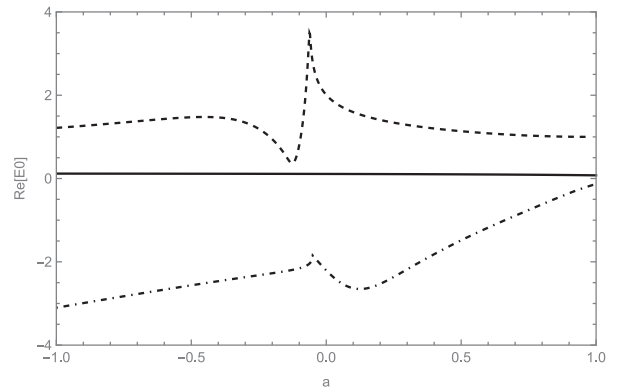
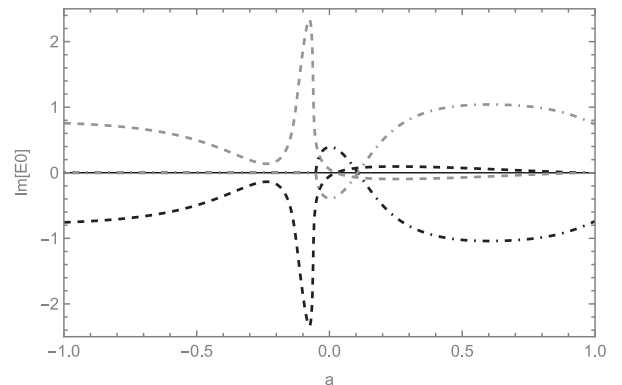
解	E	E_0
Ψ_C	-15062.8	-43.2836
$\Psi_{\bar{R}'}$	3786.4	8.95484
$\Psi_{\bar{T}'}$	0.0867229	0.12419
$\Psi_{\bar{C}'}$	$0.115378 - 1.70623i$	$0.180312 - 0.727607i$
$\Psi_{\bar{C}'^*}$	$0.115378 + 1.70623i$	$0.180312 + 0.727607i$
$\Psi_{\bar{D}'}$	$-0.241673 + 1.08228i$	$0.615174 + 0.542194i$
$\Psi_{\bar{D}'}$	$-0.241673 - 1.08228i$	$0.615174 - 0.542194i$

2.1 $a=0$ から構成した解について

$(a=0)$ -ゲージにおける6つの解のうち、 Ψ_R と Ψ_T は実条件を満たす解である。表1のように、 Ψ_R の E, E_0 はともに負で絶対値が大きく、 Ψ_T の E, E_0 はともに0に近い。 $\Psi_R(a)$ の E, E_0 の実部は絶対値が大きいため、図1と図3には現れていない。 $\Psi_T(a)$ の E, E_0 の実部は0に近く図1と図3の実線で表される。 $\Psi_R(a)$ と $\Psi_T(a)$ は実解となり、 E, E_0 の虚部は常に0で図2と図4の細線上にある。なお、 $\Psi_R(a)$ は $a=-0.028$ 、 $a=0.072$ を過ぎるとNewton法で収束しなくなり、 $-0.028 \leq a \leq 0.072$ でのみ構成できた。

$\Psi_D, \Psi_{D^*}, \Psi_C, \Psi_{C^*}$ は実条件を満たさない複素解であり、 Ψ_D と Ψ_{D^*}, Ψ_C と Ψ_{C^*} はそれぞれ互いに複素共役となっているため、表1のように E, E_0 も互いに複素共役な値となっている。 $\Psi_D(a)$ と $\Psi_{D^*}(a)$ も互いに複素共役となり、それらの E, E_0 の実部は一致し、図1と図3の破線で表される。 $\Psi_D(a)$ の E, E_0 の虚部は図2と図4の黒い破線で表され、 $\Psi_{D^*}(a)$ の E, E_0 の虚部は図2と図4の灰色の破線で表される。

同様に、 $\Psi_C(a)$ と $\Psi_{C^*}(a)$ は互いに複素共役となり、それらの E, E_0 の実部は一致し、図1と図3の鎖線で表される。 $\Psi_C(a)$ の E, E_0 の虚部は図2と図4の黒い鎖線で表され、 $\Psi_{C^*}(a)$

図 1: ($a=0$)-ゲージから構成した解の E の実部図 2: ($a=0$)-ゲージから構成した解の E の虚部図 3: ($a=0$)-ゲージから構成した解の E_0 の実部図 4: ($a=0$)-ゲージから構成した解の E_0 の虚部

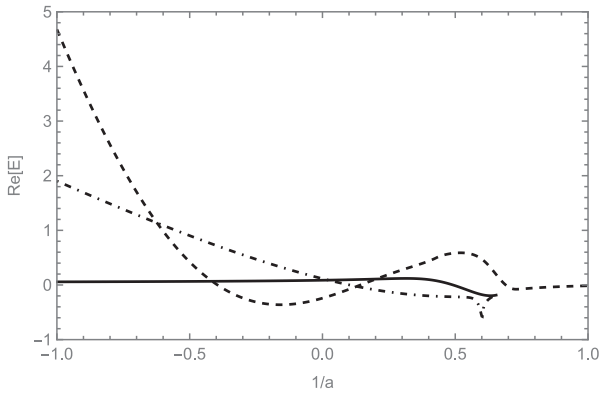


図 5: $(a=\infty)$ -ゲージから構成した解の E の実部

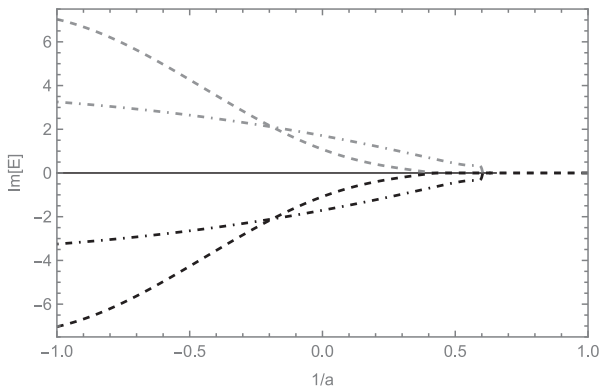


図 6: $(a=\infty)$ -ゲージから構成した解の E の虚部

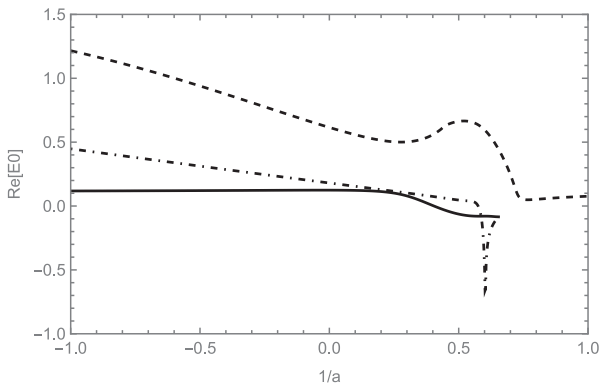


図 7: $(a=\infty)$ -ゲージから構成した解の E_0 の実部

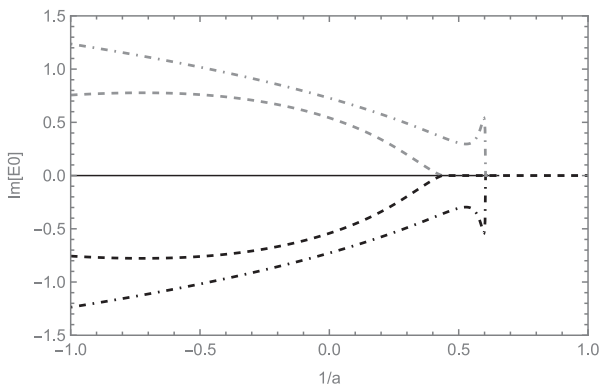


図 8: $(a=\infty)$ -ゲージから構成した解の E_0 の虚部

の E, E_0 の虚部は図2と図4の灰色の鎖線で表される。これらの黒い破線と灰色の破線, 黒い鎖線と灰色の鎖線は, 図2, 図4において, それぞれ $\text{Im } E=0, \text{Im } E_0=0$ の直線に対して対称である。ただし, $\Psi_C(a)$ と $\Psi_{C^*}(a)$ は $a=-0.052$ 付近で一致して実解となるため, それ以降の $-0.052 \geq a \geq -1$ では $\Psi_C(a) = \Psi_{C^*}(a)$ となった。なお, $\Psi_D(a)$ と $\Psi_{D^*}(a)$ は $a=0.962$ を過ぎると Newton 法で収束しなくなり, $-1 \leq a \leq 0.962$ でのみ構成できた。

2.2 $a=\infty$ から構成した解について

$(a=\infty)$ -ゲージにおける7つの解のうち, $\Psi_{\hat{c}}, \Psi_{\hat{r}}, \Psi_{\hat{t}}$ は実条件を満たす解である。表2のように, $\Psi_{\hat{c}}$ の E, E_0 はともに負で絶対値が大きく, $\Psi_{\hat{r}}$ の E, E_0 はともに正で絶対値が大きく, $\Psi_{\hat{t}}$ の E, E_0 はともに0に近い。 $\Psi_{\hat{c}}(\hat{a})$ の E, E_0 と $\Psi_{\hat{r}}(\hat{a})$ の E, E_0 の実部は絶対値が大きいため, 図5と図7には現れていない。 $\Psi_{\hat{t}}(\hat{a})$ の E, E_0 の実部は, 図5と図7の実線で表される。 $\Psi_{\hat{c}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{r}}(\hat{a}), \Psi_{\hat{t}}(\hat{a})$ は実解となり, これらの E, E_0 の虚部は常に0で図6と図8の細線上にある。なお, Newton 法の収束性により, $\Psi_{\hat{c}}(\hat{a})$ は $-1 \leq \hat{a} \leq 0.024$, $\Psi_{\hat{r}}(\hat{a})$ は $-0.804 \leq \hat{a} \leq 0.398$, $\Psi_{\hat{t}}(\hat{a})$ は $-1 \leq \hat{a} \leq 0.654$, でのみ解を構成できた。

$\Psi_{\hat{c}}', \Psi_{\hat{c}^*}', \Psi_{\hat{d}^*}, \Psi_{\hat{d}}$ は実条件を満たさない複素解であり, $\Psi_{\hat{c}}'$ と $\Psi_{\hat{c}^*}'$, $\Psi_{\hat{d}^*}$ と $\Psi_{\hat{d}}$ は互いに複素共役となっているため, 表2のように E, E_0 も互いに複素共役な値となっている。 $\Psi_{\hat{c}}'(\hat{a})$ と $\Psi_{\hat{c}^*}'(\hat{a})$ も互いに複素共役となり, それらの E, E_0 の実部は一致し, 図5と図7の鎖線で表される。 $\Psi_{\hat{c}}'(\hat{a})$ の E, E_0 の虚部は図6と図8の黒い鎖線で表され, $\Psi_{\hat{c}^*}'(\hat{a})$ の E, E_0 の虚部は図6と図8の灰色の鎖線で表される。同様に, $\Psi_{\hat{d}^*}(\hat{a})$ と $\Psi_{\hat{d}}(\hat{a})$ は互いに複素共役となり, それらの E, E_0 の実部は一致し, 図5と図7の破線で表される。 $\Psi_{\hat{d}^*}(\hat{a})$ の E, E_0 の虚部は図6と図8の灰色の破線で表され, $\Psi_{\hat{d}}(\hat{a})$ の E, E_0 の虚部は図6と図8の黒い破線で表される。これらの黒い破線と灰色の破線, 黒い鎖線と灰色の鎖線は, 図6, 図8において, それぞれ $\text{Im } E=0, \text{Im } E_0=0$ の直線に対して対称である。ただし, $\Psi_{\hat{d}^*}(\hat{a})$ と $\Psi_{\hat{d}}(\hat{a})$ は $\hat{a}=0.436$ 付近で一致して実解となるため, それ以降の $0.436 \leq \hat{a} \leq 1$ では $\Psi_{\hat{d}^*}(\hat{a}) = \Psi_{\hat{d}}(\hat{a})$ となった。なお, Newton 法の収束性により, $\Psi_{\hat{c}}'(\hat{a})$ と $\Psi_{\hat{c}^*}'(\hat{a})$ は, ともに $-1 \leq \hat{a} \leq 0.654$ でのみ解を構成できた。このうち $0.604 \leq \hat{a} \leq 0.654$ の範囲では $\Psi_{\hat{c}}'(\hat{a}) = \Psi_{\hat{c}^*}'(\hat{a})$ (実解) となった。

また, $(a=-1)$ -ゲージつまり $\hat{a}=1/a=-1$ において, $\Psi_{\hat{c}}(\hat{a})$ は $\Psi_C(a) = \Psi_{C^*}(a)$ と, $\Psi_{\hat{t}}(\hat{a})$ はタキオン真空解と, $\Psi_{\hat{d}}(\hat{a})$ は「二重ブレーン」解とそれぞれつながることがわかる。すなわち,

$$\Psi_{\hat{c}}(\hat{a} = -1) = \Psi_C(a = -1) = \Psi_{C^*}(a = -1),$$

$$\Psi_{\hat{t}}(\hat{a} = -1) = \Psi_T(a = -1),$$

$$\Psi_{\hat{d}}(\hat{a} = -1) = \Psi_D(a = -1)$$

となっている。

3. おわりに

本稿では、開弦の場の理論におけるツイスト偶のユニバーサルな開弦場の空間において、レベル切断近似を行い、a-ゲージ条件を満たす切断レベル2の数値解を調べた。a=0 (Siegelゲージ) から出発して $|a| \leq 1$ の範囲で構成した解についてそのゲージ不変量 E, E_0 を図示した。さらに、 $a = \infty$ (Landauゲージ) から出発して $1/|a| \leq 1$ の範囲で解を構成しそのゲージ不変量 E, E_0 を図示した。特に、これらのうち3つの解はa=0の解から構成したものとa=-1でつながっている。その他の解について、a=-1またはa=1を通じてさらに延長して解を構成していくこともできる。

ここで調べたのは離散的にaの値を変えて数値的に求めたものであり、レベル切断近似をした式をさらに近似的に解いた数値解である。切断レベル2では3変数の連立2次方程式となるので、丁寧に式を扱っていくことでaを連続的に変えたときの解の分岐などを厳密に調べることも可能かもしれない。

ここでは各aの値に対してa-ゲージ条件を課した作用から得られる運動方程式を解いており、本来の開弦の場の理論の運動方程式を満たすためにはBRST不変性も必要だが、切断レベル2の解は満たしていない。切断レベル無限大の極限でBRST不変性を満たすものだけが物理的に意味があるが、それは高レベルの解の振る舞いについて十分詳しく調べた後わかることだろう。

図示した通り、ここで調べた(タキオン真空解以外の)解はゲージ不変量がaの値によりかなり変わる。このことは、a-ゲージ条件のaを変えていくことで様々な物理的解釈をもつ解の分岐に移る可能性があることを示唆している。Siegelゲージ以外で興味深い数値解が見つかることを期待しており、本稿の研究はその手がかりとなるかもしれない。開弦の場の理論としては、レベル切断近似解のゲージ不変量 E, E_0 やBRST不変性・実性の切断レベル無限大の外挿値が運動方程式の解の値となるため、高レベルの膨大な計算がさらに必要である。今後、開弦の場の理論の数値解の研究を進めるには、新たな解析方法を開発することが望まれる。

謝辞

本研究の遂行にあたり、Mathematica環境を整えてくださった山口東京理科大学の学術情報システム課の方々に感謝いたします。本研究はJSPS科研費JP20K03933の助成を受けたものです。

注

- *1 切断レベルを上げていくと虚部が消えて、レベル無限大の極限で実条件を満たす解となる場合があることに注意する。
- *2 本稿の計算では $\Delta a = \pm 0.002$, $\Delta \hat{a} = \pm 0.002$ としてMathematicaを用いた。実際の数値計算の方法(Newton法)については[K(2021)]⁴⁾参照。 Δa , $\Delta \hat{a}$ の値や解の収束判定条件の置き方等により、(逐次近似の収束が遅くなる場合は)構成できる解のa, \hat{a} の範囲や得られる配位が微妙に変わる可能性があることに注意する。

参考文献

- 1) M. Asano and M. Kato: "New Covariant Gauges in String Field Theory," *Prog. Theor. Phys.* 117, 569-587 (2007) [arXiv:hep-th/0611189 [hep-th]].
- 2) M. Asano and M. Kato: "Level Truncated Tachyon Potential in Various Gauges," *JHEP* 01, 028 (2007) [arXiv:hep-th/0611190 [hep-th]].
- 3) I. Kishimoto and T. Takahashi: "Numerical Evaluation of Gauge Invariants for a-gauge Solutions in Open String Field Theory," *Prog. Theor. Phys.* 121, 695-710 (2009) [arXiv:0902.0445 [hep-th]].
- 4) I. Kishimoto: "Numerical universal solutions in a-gauge in open string field theory," *PTEP* 2021, no.12, 123B04 (2021) [arXiv:2109.02003 [hep-th]].
- 5) M. Kudrna and M. Schnabl: "Universal Solutions in Open String Field Theory," arXiv:1812.03221 [hep-th].