

[研究ノート]

## 単位弦場に基づく解周りの開弦の場の理論における 数値的「二重ブレーン」解の分岐について

岸本 功

山陽小野田市立山口東京理科大学 共通教育センター

## On Branches of Numerical “Double Brane” Solution in Open String Field Theory Around the Identity-Based Solution

Isao KISHIMOTO

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

### Abstract

The Takahashi-Tanimoto identity-based solution in bosonic open string field theory contains one real parameter  $\alpha$ . From various viewpoints, it has been confirmed that the solution is pure-gauge for  $\alpha > -1/2$  and represents the tachyon vacuum for  $\alpha = -1/2$ . In particular, we have obtained a consistent numerical result with the above for the “double brane” solution in the previous work using the level truncation approximation. In the literature, we obtained the “double brane” solution in theory around the identity-based solution as follows: firstly, we constructed the “double brane” solution for various values of  $\alpha$  at truncation level two, and then we constructed numerical solutions at each  $\alpha$  level by level. Alternatively, at each truncation level, we can construct numerical solutions from Kudrna-Schnabl’s “double brane” solution, which corresponds to the case  $\alpha = 0$ , by varying the value of  $\alpha$  little by little. We have found that solutions by two methods are in different branches for a region of  $\alpha$  at truncation levels 20 and 22. Here, we plot gauge invariants for them and give some comments on consistency.

**Key words:** open string field theory, identity-based solution, double brane, level truncation approximation

**キーワード:** 開弦の場の理論, 単位弦場に基づく解, 二重ブレーン, レベル切断近似

## 1. はじめに

ボソンの開弦の場の理論:

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

における, 単位弦場に基づきパラメータ $a$ を含む高橋-谷本解<sup>1)</sup>  $\Psi_a^{\text{TT}}$  は, 「 $a > -1/2$ では純ゲージ解であり $a = -1/2$ で非自明なタキオン真空を表す」(\*)こと<sup>1,2)</sup> が様々な研究により確かめられてきた。数値計算の観点からは, この解の周りで展開して得られる理論:

$$\begin{aligned} S_a[\Phi] &= S[\Psi_a^{\text{TT}} + \Phi] - S[\Psi_a^{\text{TT}}] \\ &= -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Phi, Q' \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right) \end{aligned}$$

において, タキオン真空・摂動真空に対応する数値解を求めてゲージ不変量を評価した結果, (\*)と整合することが示された<sup>3,4)</sup>。さらに, その後の研究では, 「二重ブレーン」解及び「ゴーストブレーン」解に対しても同様な数値計算を遂行し, (\*)と矛盾しない結果が得られている<sup>5)</sup>。

これらの数値計算では, 運動方程式を有限個の連立方程式に帰着させるために開弦場に現れる最大レベルを有限とするレベル切断近似を用いており, 整合的な対称性を課すことで, レベルを非負の偶数に限り開弦場をSU(1,1)-singlet状態のみで展開している。作用 $S_a[\Phi]$ を変分して得られる運動方程式は

$$Q' \Phi + \Phi * \Phi = 0 \quad (1)$$

であるが, 開弦場 $\Phi$ を上述のように展開した場合, これに $b$ ゴーストの零モードをかけた

$$L' \Phi + b_0 (\Phi * \Phi) = 0 \quad (2)$$

( $L' \equiv \{b_0, Q'\}$ )を数値的に解けば良い。この数値解は, 切断レベルを上げると本来の運動方程式の解に近づくと考えられる。

文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>では, まず, 切断レベル2でKudrna-Schnabl<sup>6)</sup>の「二重ブレーン」解を様々な $a$ の値<sup>1)</sup>に拡張した解を構成し, 次に, 各 $a$ の値に対して, 切断レベルを順に2ずつ上げて数値解を求めた(方法(A))。しかし, 各切断レベルで求めたKudrna-Schnablの「二重ブレーン」解(これは $a=0$ に対応)を出発点として, 各切断レベルに対して $a$ の値を少しずつ変えて様々な $a$ に拡張した解を構成することもできる(方法(B))。これら2つの方法で求めた解を比較すると, 切断レベル20と22において, ある $a$ で異なる解に分岐することがわかった。ここでは, これらの数値解に対するゲージ不変量の分岐の様子を図示し, 解の整合性についてもまとめる。

## 2. 数値解の分岐とゲージ不変量

文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>では, 方法(A)により切断レベル $L=22$

まで $-0.500 \leq a \leq 0.500$ の範囲で解を求めた。方法(B)で数値解を求めると,  $L \leq 18$ では $a \geq -0.499$ で(A)と同じ解が得られた。 $a = -0.500$ は例外的で,  $L=12, 14, 16, 18$ で方法(A)と(B)の解が異なった。より高い切断レベルの $L=20$ と $L=22$ では, 方法(B)により $a=0$ から出発して $a = -0.500$ に到達する前に方法(A)の解からの分岐が生じた。詳細は次の通りである。

$L=20$ : 方法(A)では $a = -0.468$ のみ解なし。(ニュートン法の逐次近似が収束しない。)方法(B)で求めた解は $a \geq -0.462$ で(A)の解と一致し,  $-0.463 \geq a \geq -0.469$ で(A)と異なる解になり,  $a = -0.470$ で解が得られなくなった。(収束しなくなった。)

$L=22$ : 方法(A)では $a = -0.468$ のみ解なし。方法(B)で求めた解は $a \geq -0.445$ で(A)の解と一致し,  $-0.446 \geq a \geq -0.484$ で(A)と異なる解になり,  $a = -0.485$ で解が得られなくなった。(収束しなくなった。)

前節の(\*)のように,  $a = -1/2$ の理論は $a > -1/2$ の理論とは本質的に異なるはずなので, 比較のため, 方法(A)で求めた $a = -1/2$ の数値解を出発点として, 各切断レベルに対して $a$ を少しずつ増やして $a > -1/2$ の解を構成することも行った(方法(C))。 $L \geq 12$ の各切断レベルにおいて方法(C)で得られた解は $a \geq -0.499$ で方法(A)と異なる解となった。以上より, 特に $L=20, 22$ では「二重ブレーン」解に関連した数値解の分岐が方法(A),(B),(C)により(少なくとも)3つ生じることがわかった。

文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>では, ボソンの開弦の場の理論のゲージ不変量として, エネルギー:

$$E[\Phi] = 1 - 2\pi^2 g^2 S_a[\Phi]$$

とゲージ不変オーバーラップ:

$$E_0[\Phi] = 1 - 2\pi \langle I|V|\Phi \rangle$$

を, 求めた数値解に対して評価した。これらは, タキオン真空解(ブレーン0枚)に対して $E=E_0=0$ となるように規格化されたものである。つまり,  $E, E_0$ の値がブレーンの枚数に対応する。ここでは, 方法(A),(B),(C)の解の分岐に対応する $E, E_0$ の値を, 切断レベル $L=20, 22$ それぞれについて図示する。

なお, エネルギー $E$ とゲージ不変オーバーラップ $E_0$ は本来実数値をとるものであるが, 「二重ブレーン」解は切断レベル2において係数に虚部を持つ(開弦の場の実条件を満たさない)ものから構成した数値解なので, 一般に $E, E_0$ は複素数値となる。そこで, それぞれの実部と虚部に分けてプロットした(図1~8)。いずれの図においても方法(A): 細かい実線, 方法(B): 破線, 方法(C): 点線で表している<sup>2)</sup>。

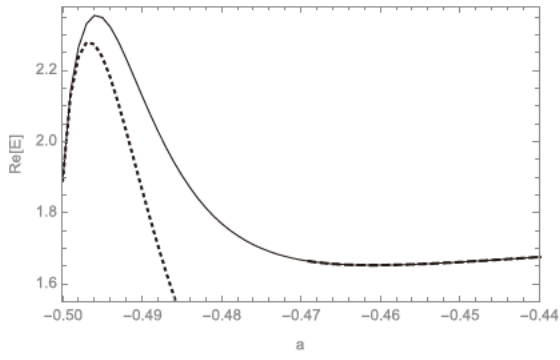


図 1  $L = 20$ での $E$ の実部

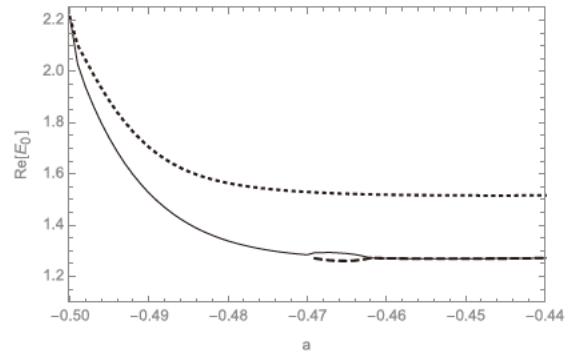


図 5  $L = 20$ での $E_0$ の実部

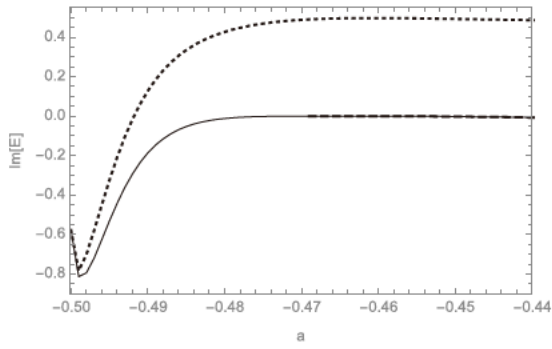


図 2  $L = 20$ での $E$ の虚部

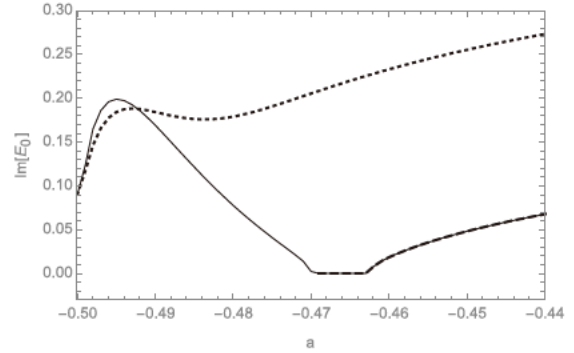


図 6  $L = 20$ での $E_0$ の虚部

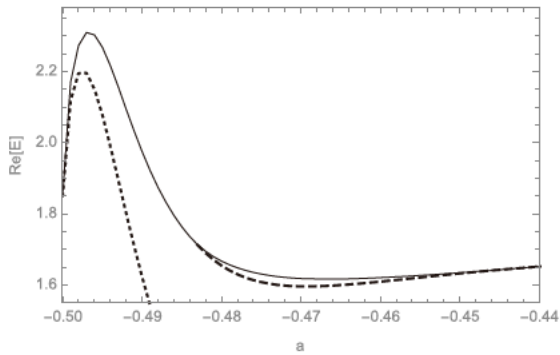


図 3  $L = 22$ での $E$ の実部

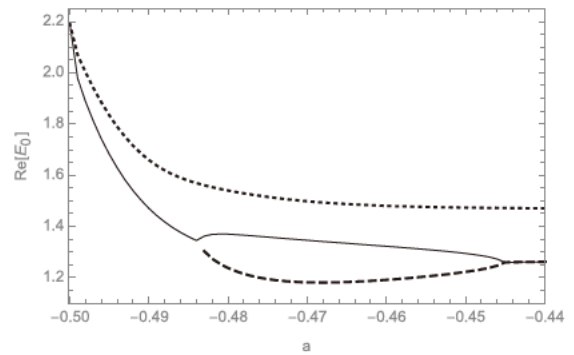


図 7  $L = 22$ での $E_0$ の実部

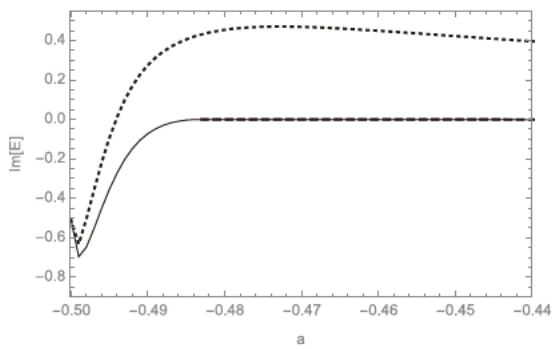


図 4  $L = 22$ での $E$ の虚部

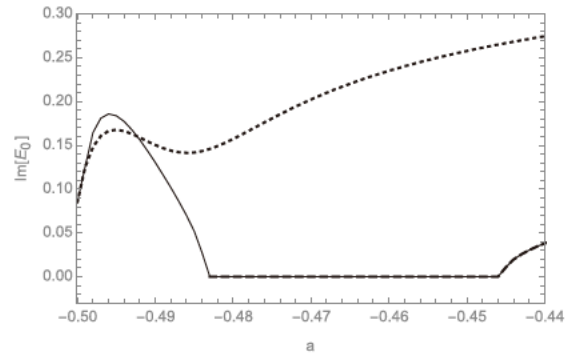


図 8  $L = 22$ での $E_0$ の虚部

$L=20$ では(A)と(B)の値は、 $E$ については重なっている(図1,2)が、 $E_0$ については実部に少し差が生じている(図5)。また、 $L=20$ (図1,2,5,6)よりも $L=22$ (図3,4,7,8)の方が(A)と(B)の値の差は大きい。(A)と(B)について、 $L=20,22$ の $E, E_0$ の値は、解の分岐が現れる $a$ の範囲で虚部がゼロ(図2,4,6,8)、つまり、実数になっている。(C)の $E, E_0$ は、(A)の値と異なっており、(B)と(A)の値の差よりもかなり大きい(図1~8)。

### 3. 数値解の整合性

方法(A),(B),(C)で求めた解は、運動方程式(1)ではなく、これを $c_0 b_0$ で射影した式(2)(Siegelゲージの運動方程式)を数値的に解いたものになっている。したがって、式(1)の残りの部分(Batalin-Vilkovisky形式におけるBRST不変性):  $b_0 c_0 (Q' \Phi + \Phi * \Phi) = 0$  が満たされているかどうかを、求めた数値解に対して調べる必要がある。ここでは文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>と同様にBRST不変性の最低レベルの部分:  $|\Delta_S| = |(0|c_{-1}b_2c_0|Q' \Phi + \Phi * \Phi)|$  を評価し図示する。(2)の数値解が運動方程式(1)と整合するならば、 $|\Delta_S|$ はレベルを上げるとゼロに近づくはずであり、そうでなければ物理的でない解とみなされる。切断レベル $L=20,22$ に対し方法(A),(B),(C)で求めた解の $|\Delta_S|$ をそれぞれ細い実線、破線、点線でプロットすると図9,10のようになった。

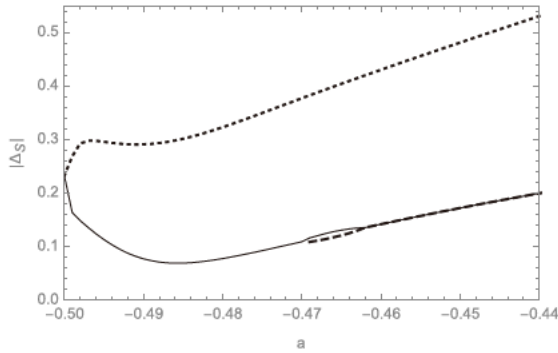


図 9  $L = 20$ での $|\Delta_S|$

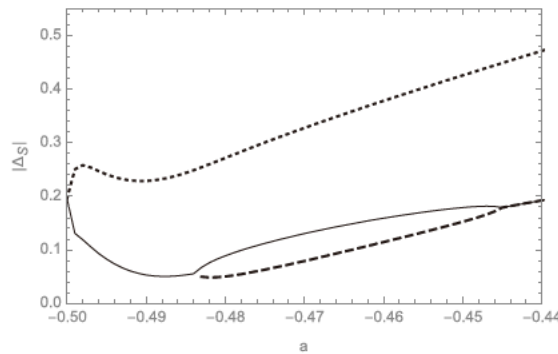


図 10  $L = 22$ での $|\Delta_S|$

方法(A)と(B)の解について、 $L=20,22$ それぞれにおいて解の分岐が現れる $a$ の範囲で $|\Delta_S|$ の値は(B)の方が小さい(図9,10)。これは、(A)よりも(B)の解の方が運動方程式(1)とより整合的であり、物理的であることを示している。 $L=20$ (図9)よりも $L=22$ (図10)の方がその差が大きいことから、レベルを上げると(B)の方がより物理的になることが示唆される。一方、方法(C)の解に対する $|\Delta_S|$ の値は(A),(B)と比較して $a > -0.500$ でかなり大きくなっている(図9,10)ため、(C)の解は物理的ではない、と考えられる。

開弦の場の理論において作用が実数になるためには、開弦の場が実条件を満たす必要がある。これは文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>で採用した状態の基底を取ると、開弦の場の展開式における係数が全て実数になることを意味する。ところが、前節でも述べたように、数値的「二重プレーン」解は切断レベル2において係数が虚部を持つので、高いレベルの数値解も一般には実条件を満たさない。しかし、切断レベル $L \geq 20$ では、ある $a$ の範囲で実条件を満たすようになることが文献[KT(2020)]<sup>5)</sup>で示唆された。この実条件を満たす $a$ の範囲は、 $L=20,22$ それぞれにおいて、実は前節で述べた(A)と(B)の解の分岐が現れる範囲と一致している。したがって、解が複素から実になる $a$ の値で、数値的に解が不安定になり分岐が生じると考えられる。方法(A),(B),(C)の解の虚部と実部のユークリッドノルムの比:  $\text{Im}/\text{Re}$ をそれぞれ細い実線、破線、点線でプロットすると図11,12のようになった。

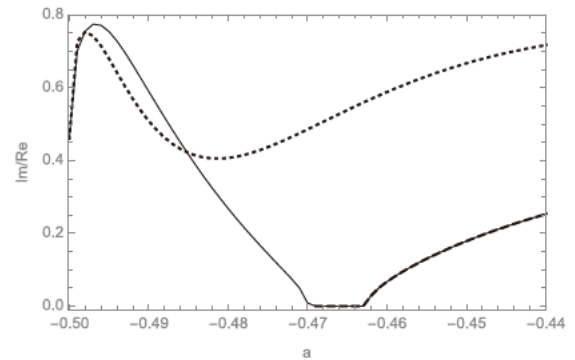


図 11  $L = 20$ での $\text{Im}/\text{Re}$

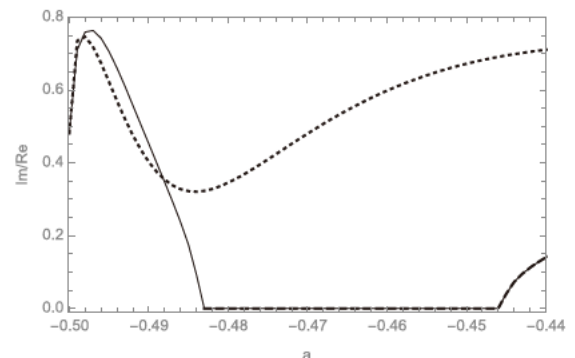


図 12  $L = 22$ での $\text{Im}/\text{Re}$

図11,12の(A)と(B)の解が実条件を満たす範囲では  $E, E_0$  が実数となる(図2,4,6,8)。 (A),(B)の解はレベルを上げると実条件を満たす  $a$  の範囲が広がる傾向にある。(C)の解は(A),(B)と比較して虚部の割合が高い(図11,12)ので、レベルを上げても実条件を満たさないままであり、その意味でも物理的な解ではない。

#### 4. おわりに

本稿では、単位弦場に基づく解周りの開弦の場の理論の数値的「二重プレーン」解に着目し、切断レベル20,22では解が実条件を満たすようになる  $a$  の値で解が分岐することを述べ、そのエネルギーとゲージ不変オーバーラップを図示した。また、BRST不変性の観点からは、各  $a$  でレベルを2ずつ増やして構成した解(A)よりも各レベルで  $a=0$  から  $a$  を少しずつ減らして構成した解(B)の方が整合的であることを図から読み取った。ただし、様々な  $a$  に対して数値解を求める際、方法(B)では並行して計算できないため、非常に時間がかかる。また、方法(B)では、切断レベル20,22において、物理的に興味深い  $a=-1/2$  の理論の数値解に到達できない、という問題もある。一方、方法(A)で構成した  $a=-1/2$  の解から、各レベルで  $a$  の値を少しずつ増やす方法(C)で求めた数値解は、(A),(B)と比較して物理的に整合性がないこともわかった。

これらの結果の詳細は、今後の弦の場の理論の数値的手法による研究で有用なものになる、と期待する。

#### 謝 辞

本研究について、議論していただいた高橋智彦氏に感謝いたします。本研究はJSPS科研費JP20K03933,JP20K03972の助成を受けたものです。また、本研究の数値計算の一部では、京都大学基礎物理学研究所の計算機(sushiki,XC40)を利用しました。

#### 注

- \*1 実際の数値計算では、 $a$  の値を0.001ずつ変えている。後述の方法(B),(C)でも同様。
- \*2 本稿の図の横方向は  $a$  の値を表す。実際の数値データは  $a=-0.500, -0.499, \dots$  のように離散的であるが、隣り合う  $a$  の値のデータ点を線分で結んで表示している。

#### 参考文献

- 1) T. Takahashi and S. Tanimoto: “Marginal and scalar solutions in cubic open string field theory,” IHEP 03, 033 (2002) [arXiv:hep-th/0202133 [hep-th]].
- 2) I. Kishimoto and T. Takahashi: “Open string field theory around universal solutions,” Prog. Theor. Phys. 108, 591-602 (2002) [arXiv:hep-th/0205275 [hep-th]].
- 3) T. Takahashi: “Tachyon condensation and universal solutions in string field theory,” Nucl. Phys. B 670, 161-182 (2003) [arXiv:hep-th/0302182 [hep-th]].
- 4) I. Kishimoto and T. Takahashi: “Vacuum structure around identity based solutions,” Prog. Theor. Phys. 122, 385-399 (2009) [arXiv:0904.1095 [hep-th]].
- 5) I. Kishimoto and T. Takahashi: “Numerical twist-even SU(1,1)-singlet solutions in open string field theory around the identity-based solution,” IHEP 02, 133 (2021) [arXiv:2011.08378 [hep-th]].
- 6) M. Kudrna and M. Schnabl: “Universal Solutions in Open String Field Theory,” arXiv:1812.03221 [hep-th].