

[研究ノート]

1次元系における非時間順序積と量子カオス

吉井 涼輔

山陽小野田市立山口東京理科大学共通教育センター

Out of Time-ordered Correlators and Quantum Chaos in One Dimensional System

Ryosuke YOSHII

Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

要 約

決定論的な理論にしたがっていても初期値鋭敏性により将来が予測できないような現象をカオスと呼ぶ。自然界にはカオス性を持った現象が多く存在する。

古典系では、初期条件がわずかに異なる粒子の軌跡が時間変化とともに指数関数的に離れていくとき、その指数(リアプノフ指数)をカオス性の特徴づけとして用いる。しかし、古典力学においてカオス性を示す系を量子力学によって扱くと、通常のカオス性の特徴付けが不可能になる場合がある。これは量子系において軌跡という概念が使えなくなることに起因する。

近年、軌跡を用いない、量子系でのカオス性の特徴付けの方法として、非時間順序積と呼ばれる物理量が注目されている。この量の時間変化を見ると、その指数増大に対する指数として古典系でのリアプノフ指数に対応する量が得られるという主張があるが、古典系でカオス性を示さない系でリアプノフ指数が有限となる場合や、古典系でカオス性を示す系で指数増大が生じない場合があるという指摘がある。

本稿では古典系でカオス性を示さない1次元系のセットアップで非時間順序積を解析し、この場合におけるリアプノフ指数の計算を行う。古典力学ではこの系はカオス性を持たないが、非時間順序積には指数増大が見られた。

キーワード：量子カオス, 非時間順序積, 1次元系

Keywords: quantum chaos, out of time-ordered correlators, one dimensional system

1. 導入

物理学におけるカオス、特に古典系でのカオスは非線形な系で生じ、初期値鋭敏性や非周期性で特徴付けられる。このうち、初期値鋭敏性は初期時刻でのわずかな差が時間と共に軌跡に大きな差を生じることを表しており、自然現象などで未来の予測が非常に難しい現象の原因となると考えられている。

一方、量子力学では観測と呼ばれる例外的な操作を除いてあらゆる物理現象の時間発展が線形な方程式で記述されることが知られている。また量子系では不確定性のため、通常は軌跡の概念が近似的にしか存在せず、初期値鋭敏性の定義も難しい状況となる。したがって、エネルギー準位の統計など、他の性質が注目され、多数の研究が行われてきた [1]。また、この難点を克服するために、常に軌跡をある程度確定させるように連続測定を行うことによって初期値鋭敏性を解析する方法も提案されている [2]。

近年、量子系において初期値鋭敏性を反映している量として非時間順序積と呼ばれる量が注目されている [3]。本稿ではこの非時間順序積の簡単な説明を行い、具体的な例での計算結果によって、初期値鋭敏性を表しているとみなすことが妥当であるかどうかを調べる。

2. 非時間順序積とリアプノフ指数

通常、量子力学では物理量の時間相関を計算するとき、異なる時間での演算子の積の期待値を計算する。密度を例にとると $\langle n(t)n(0) \rangle$ のような量の計算を行うことになる。ここで、密度は粒子の生成消滅演算子を用いると $n=a^\dagger a$ とかけるため、

$$U(t,0) = \langle a^\dagger(t)a(t)a^\dagger(0)a(0) \rangle \quad (1)$$

のような量を計算することになる。

一方、非時間順序積では

$$O(t,0) = \langle a^\dagger(t)a^\dagger(0)a(t)a(0) \rangle \quad (2)$$

のような量を取り扱うことになる。以下、このような量に初期値鋭敏性が現れると信じられている理由を概観していく。

量子力学と古典力学をつなぐ方法にはいくつか流儀があるが、そのひとつにディラックの置き換え、という方法がある。これは古典系での物理量のポアソン括弧に対して、量子系では対応する物理量の演算子に対する交換関係に置き換える、という正準量子化の一種である。例えば位置と運動量に対して

$$\{x, p\} = 1 \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

と置き換えることにより、量子系へと移ることができる。ここで、 $[A,B]=AB-BA$ である。さらに、物理量 A とハミルトニアン H に対して

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} \rightarrow i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

と対応させたものが量子系における物理量 A の時間発展を記述する。

ここで、ポアソン括弧の定義より、物理量として時刻 t での位置 $x(t)$ と時刻 0 での運動量 $p(0)$ を例にとると

$$\{x(t), p(0)\}_{t=0} = \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \frac{\partial p(0)}{\partial p(0)} - \frac{\partial x(t)}{\partial p(0)} \frac{\partial p(0)}{\partial x(0)}$$

となるが、右辺第二項は $\partial p(0)/\partial x(0)=0$ よりゼロとなる。

以下、カオス系を考え、初期の微小な差が時間と共に指数関数的に増える状況を考える。つまり、

$$\Delta x(0) \rightarrow \Delta x(t) \sim \Delta x(0)e^{\lambda t}$$

のようになる状況を考える。ここで、 λ は正の実数であり、カオス性の強さを特徴付ける量となっており、リアプノフ指数と呼ばれている。この場合、先ほどのポアソン括弧は

$$\{x(t), p(0)\}_{t=0} = \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \sim e^{\lambda t}$$

を与えることが期待される。これに対して量子系に移る手続きをそのまま適用すれば

$$[x(t), p(0)] = i\hbar \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \sim i\hbar e^{\lambda t}$$

となると期待される。この演算子の期待値をそのまま計算すると正負で打ち消しあってゼロとなることが多いので、実際は絶対値の二乗 $|[x(t), p(0)]|^2$ の期待値を考える。演算子の交換関係は

$$[x(t), p(0)] = x(t)p(0) - p(0)x(t)$$

であるため、この量の絶対値の二乗から

$$x(t)p(0)x(t)p(0) - x(t)p(0)p(0)x(t) - p(0)x(t)x(t)p(0) + p(0)x(t)p(0)x(t)$$

の 4 項が生じる。このうち 2 項目と 3 項目は期待値計算における巡回性を使うと (1) 式の形に書き直すことが出来る。これはクラスター性という性質によって、通常は t が非常に大きい時に

$$\langle x(t)x(t)p(0)p(0) \rangle \sim \langle x(t)x(t) \rangle \langle p(0)p(0) \rangle$$

のように振舞うため、この部分からは通常の座標の二乗平均と運動量の二乗平均の積が出てくるだけである。したがって、指数増大は生じない。そのため、指数増大が生じるのは残りの (2) 式の形の 1 項目と 4 項目からであると期待される。

以上の理由から、非時間順序積の期待値を調べれば

リャプノフ指数が量子系においても計算できると信じられている。また、既にそれを仮定したもとで多くの系でリャプノフ指数の計算がなされている。

しかし、いくつかの問題があることが知られている。まず、ポアソン括弧をディラック括弧に直すという処方箋を異なった時刻の演算子に用いることの妥当性は保証されていない。したがって、ここでの議論の出発点である、異なる時刻での演算子の交換関係が古典系との対応からリャプノフ指数を表すと考える部分には飛躍がある。また、軌跡が定義できない状況におけるリャプノフ指数とは何かについては何も説明がなされていない。さらに、既に先行研究において、古典系でカオス系ではない系でリャプノフ指数が得られてしまう場合 [4, 5] や古典系でカオス系であるにも関わらずリャプノフ指数が得られない場合 [6] も知られている。

本稿では最近明らかにされた、1次元系で有限のリャプノフ指数が得られる系のより実現性の高いモデルと、そのモデルに類似の1次元系モデルでの計算結果を比較し、非時間順序積によって量子カオスの特徴付けが行えるどうかを調べる。

本稿では、以下、 $\hbar=1$ とし、系のサイズを 20 とする。つまり、系のサイズの $1/20$ を用いて長さを無次元化する。さらに粒子の質量を $m=1$ とし、全ての物理量を無次元化する。温度に k_B をかけたものを T とし、簡単のため温度と呼ぶことにする。

3. 1次元系における非時間順序積

以下、本研究ノートで扱う2つのモデルを説明する。1つ目は高さが無限大の井戸型ポテンシャルの中に矩形の別のポテンシャルがある場合である (図1)。古典系において、最初 $x=0$ に粒子がある状況考えると、中心のポテンシャルよりもエネルギーが低い場合、粒子は $[0, a]$ 区間を往復運動し、中心のポテンシャルエネルギーよりもエネルギーが高い場合、粒子は $[0, 2a+b]$ 区間を往復する。

次に、2つ目のモデルとして、中心のポテンシャルが放物線型のポテンシャルとなっている場合を考える (図2)。この場合も古典系では先ほどのモデルと同じようにエネルギーによって往復する区間が変わるだけである。

これらのモデルを量子系で考えると、トンネル効果のため、エネルギーがポテンシャルよりも低い場合にも全区間を運動し、ポテンシャルよりも高い場合に

もポテンシャルによって反射され得る。その結果として、無限系で、中心のポテンシャルが底抜けの場合、後者のモデルで非時間順序積から有限のリャプノフ指数が得られることが知られている。^{*1}

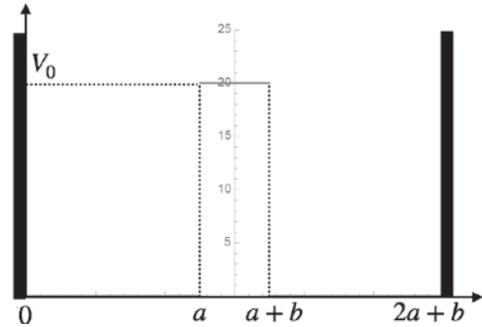


図1. 井戸型ポテンシャル中の矩形ポテンシャル

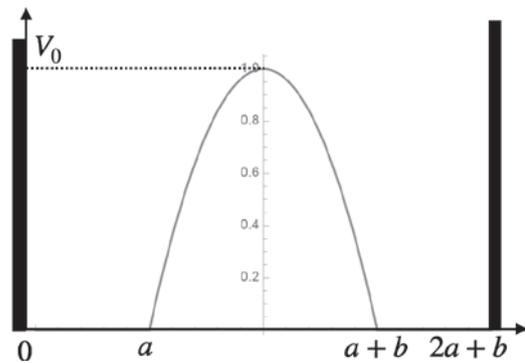


図2. 井戸型ポテンシャル中の放物型ポテンシャル

より具体的な計算の詳細を説明する。系としては1次元系に1粒子が存在する場合を考える。このとき、以下の量を計算し、リャプノフ指数を見積もる。

$$\langle |[x(t), p(0)]|^2 \rangle = \langle [x(t)p(0) - p(0)x(t)]^2 \rangle.$$

ここで、平均はカノニカル平均とする。つまり、物理量 A に関する期待値は

$$\langle A \rangle = \text{Tr} A e^{-H/T} / \text{Tr} e^{-H/T}$$

によって計算する。ここで、 T は系の温度であり、 H はハミルトニアンである。実際の計算ではハミルトニアンの固有状態で対角和を計算するが、有限効果が効かなくなるまでとって、残りは打ち切る。以下では、

$$W(t) = \ln \langle |[x(t), p(0)]|^2 \rangle$$

と時間の関係を見ていく。この量が線形に伸びる領域ではその傾きを λ とした時、非時間順序積に $e^{\lambda t}$ の振る舞いが生じている。したがって、図の線形領域の傾きがリャプノフ指数に他ならない。

4. 非時間順序積の解析結果

まず、矩形ポテンシャルの場合の解析結果を説明する。図3は $2a+b=20$ とし、 $b=4$, $V_0=20$ とした結果である。温度は $T=0.1$ である。また、温度は $T=1.0$ とした結果が図4である。これらの結果から分かるように時間発展の初期には線形な増加は見られないが、有意に線形な振る舞いが見られる領域が現れる。この部分的な線形領域は古典系でカオス性を示す、スタジアムビリヤードのモデルでも見られる [6]。

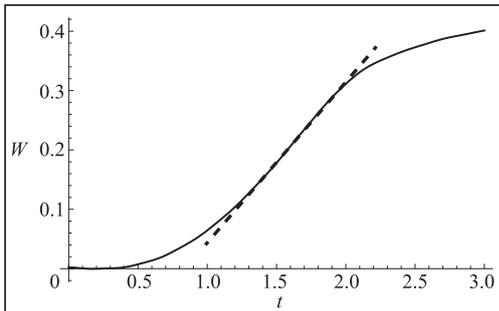


図3. $T = 0.1$ の非時間順序積の時間依存性(箱型)

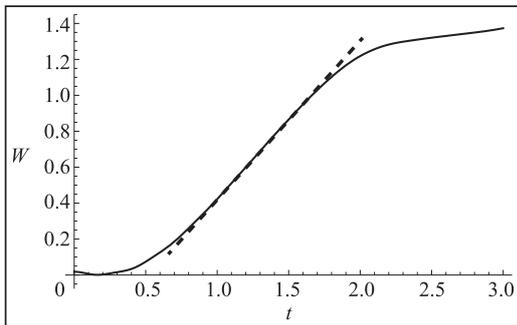


図4. $T = 1.0$ の非時間順序積の時間依存性(箱型)

これらの結果からそれぞれリャプノフ指数を見積ると、 $T=0.1$ のとき、 $\lambda \sim 0.3$ が得られ、 $T=1.0$ のとき、 $\lambda \sim 0.9$ が得られる。

同様に、放物線型のポテンシャルについて非時間順序積の解析を行った結果が図5,6である。

これらの結果からそれぞれリャプノフ指数を見積ると、 $T=0.1$ のとき、 $\lambda \sim 0.2$ が得られ、 $T=1.0$ のとき、 $\lambda \sim 0.6$ が得られる。

矩形ポテンシャルの結果も放物型ポテンシャルの場合も初期に線形でない領域があり、その後線形領域が生じていることが分かる。この振る舞いは非時間順序積に一般的に生じる現象であり、初期の非線形な振る舞いが生じる時間はエーレンフェスト時間と呼ばれている。また、どちらの場合もリャプノフ指数が温度に依っているが、実はリャプノフ指数の上限が温度で

決まっているという主張があり、その上限は温度に $2\pi k_B/\hbar$ をかけたもので与えられ、Maldacena-Shenker-Stanford(MSS) 上限と呼ばれている [3]。MSS 上限は、本解析で用いた無次元化では $2\pi T$ となっている。本解析の結果はどちらのモデルにおいてもその上限値を超えていないことが確認できる。

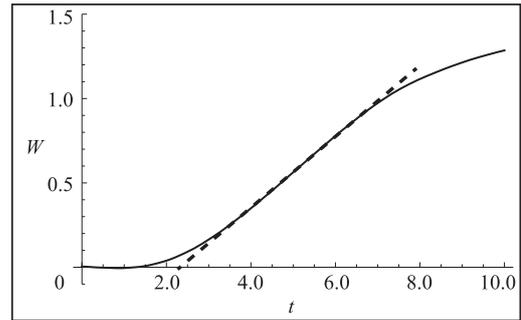


図5. $T = 0.1$ の非時間順序積の時間依存性(放物型)

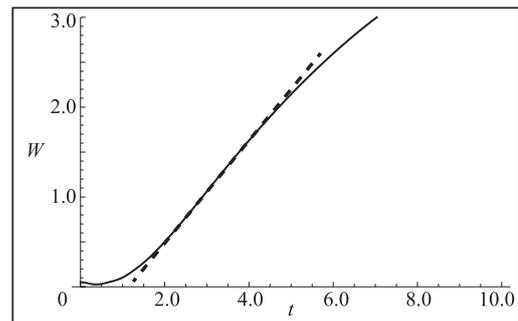


図6. $T = 1.0$ の非時間順序積の時間依存性(放物型)

5. 結論と今後の展望

本稿では古典系ではカオス性が生じないとされている1次元系について2つのモデルで非時間順序積の解析を行った。矩形型ポテンシャルにおいても放物型ポテンシャルにおいてもエーレンフェスト時間までの非線形な振る舞いと線形に振る舞う領域が見られた。また、温度によるリャプノフ指数の変化も見られ、どちらのモデルにおいても MSS 上限を超えないことが確認できる。

特に放物型ポテンシャルにおいては無限系でポテンシャルが底抜けの場合にはリャプノフ指数が有限になることが解析的に示されている [7]。この解析によると、特に放物線の停留点あたりの量子トンネルの寄与がリャプノフ指数を与えると主張されているため、本稿のモデルにおいても十分に系のサイズを大きくし、エネルギー準位が密になれば同じ振る舞いが見られる

と期待されるため、整合的である。しかし、矩形モデルは古典系において等速直線運動を生じるだけであるため、非時間順序積に線形な領域が見られている点についてはその線形な伸びをリアプノフ指数と対応させることに問題がある可能性を示唆している。

先行研究では円形のビリヤードにおいてやはり同様に線形の振る舞いが生じることが確認されているが[6]、このモデルも古典系でカオス性を示さないため、同様の問題が生じていると考えられる。

本稿の結果や先行研究の結果を統合すると、量子的に非時間順序積を評価した結果として、“量子的な”リアプノフ指数が得られるが、古典系でのリアプノフ指数とそのまま対応するかどうか不明である。これは、実際の実験で量子的なリアプノフ指数を測定する際に、非時間順序積が指数増大する領域があったとしても系がカオス系であるかどうかの判断が出来ない可能性を示唆している。

今後の展望として、より多くの系で非時間順序積を解析し、古典系のリアプノフ指数との対応を調べることが必要である。また、別の方向としては非時間順序積の一般的性質をさらに系統的に調べ、どのような条件下で古典系でのリアプノフ指数を与え得るかを調べることも重要である。

注

*1. 古典系でも軌道が閉じないモデルでリアプノフ指数は有限となり得るが、通常の意味ではカオス系とみなされない。

謝辞

本研究ノートで用いた計算手法や議論において、先行研究がその基礎となっており、共同研究者である橋本幸士氏、村田佳樹氏に感謝します。

参考文献

- [1] F. Haake: *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Heidelberg, Germany, 2001.
- [2] T. Bhattacharya, S. Habib, and K. Jacobs: Continuous quantum measurement and the emergence of classical chaos, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 4852.
- [3] J. Mardancena, S. H. Shenker, and D. Stanford: A bound on chaos, *JHEP* **08** (2016) 106.
- [4] E. B. Rozenbaum, L. A. Bunimovich, and V. Galitski: Early-Time Exponential Instabilities in Nonchaotic Quantum Systems, *Phys. Rev. Lett.* **125**, (2020) 014101.
- [5] S. Pilatowsky-Cameo, *et.al.*: Positive quantum Lyapunov exponents in experimental systems with a regular classical limit, *Phys. Rev. E* **101**, (2020) 010202(R).
- [6] K. Hashimoto, K. Murata, and R. Yoshii: Out-of-time-order correlators in quantum mechanics, *JHEP* **10** (2017) 138.
- [7] T. Morita: Thermal Emission from Semiclassical Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019) 101603.