ラッザリニとビュホンの針の問題

──記号計算システムを活用した確率の計算──

Lazzarini and Buffon's Needle Problem

──Calculation for Algorithmic Probabilities harnessing Symbolic Computation Systems──

大内 俊二*
Shunji OUCHI

Abstract

Comté de Buffon worked out the probability that a needle of length l thrown at random on to a grid of parallel lines with distance $a(> l)$ apart cuts a line to be $\rho = 2l/\pi a$. So, if we conduct an experiment by repeatedly throwing a needle a large number N of times and find that the needle cuts a line R times, then we can obtain an estimate of π from the approximate equation $\pi \approx \frac{N}{R} \cdot \frac{2l}{a}$. This is well known as the Buffon's needle problem. The most accurate estimate of π in this way was credited to Lazzarini. He reported an experiment based on 3408 trials which resulted in 1808 successes leading to the equation $\pi \approx \frac{5}{3}\frac{3408}{1808} = \frac{5}{3}\frac{16\times213}{16\times113} = \frac{5}{3}\frac{\times213}{\times113} = \frac{355}{113} = 3.1415929\cdots$. Notice that the strange numbers that appear in this computation and how the numbers factorize nicely yielding the value of π as the ratio 355/113 which is known to be the best rational approximation to π involving small numbers. The game played by Lazzarini is now clear as revealed by independent investigations due to two scientists. In order to get the ratio 355/113 when $l/a = 5/6$, one has to get the ratio 113/213 for R/N, i.e. , $113k$ successes in $213k$ trials for any positive integer k. In Lazzarini's case, k was 16. There are two possibilities. Either he did not do any experiment which he described in great detail in his ariticle and just reported the numbers he wanted. Or, he did experiments in batches of 213 trials and "watched his step" till he struck the right number of successes. In this paper we consider what is the probability that with 16 repetitions, as done by Lazzarini, one can get the needed number of successes, 113×16. Making use of the idea of partition and utilizing the symbolic computation system Maple, we obtain the exact value for the above probability.
Key words: Buffon's needle problem, Symbolic computation systems, Binomial distribution, partition, Maple

1 はじめに

平行線が一面に引かれた床の上に針をランダムに投げ，平行線と交わった針の数を数えることによって，π の近似値が求まるというのがビュホンの針の問題であるが，この方法による π の最も正確な近似値としてラッザリニによる実験結果 (3408 回中 1808 回交わった) が報告されている。この実験結果によれば，針の長さと平行線の間隔との比を 5/6 としたとき，π の近似値は $\pi \approx \frac{5}{3}\frac{3408}{1808} = \frac{5}{3}\frac{16\times213}{16\times113} = \frac{5}{3}\frac{\times213}{\times113} = \frac{355}{113} = 3.1415929\cdots$ となる。ところで，この計算途中に現れる有理数 355/113 は，π の少ない桁数からなる有理数近似として 5 世紀に中国で発見されている。したがってこの有理数に着目すると，針の長さと平行線の間隔との比を 5/6 としたとき，ラッザリニの結果を得るためには $213k$(k は自然数) 回中ちょうど $113k$ 回交わるまで実験を続ければ上の近似値が得られることになり，ラッザリニの場合 k が 16 の場合だったのではないかという疑いがもたれている。そこでこの論文では，213 回の実験をひとまとまりとして，ラッザリニの実験で行われたように 16 回までの繰り返しによって，意図した成功の回数が得られる確率を計算してみることにした。

*下関市立大学経済学部　E-mail:ouchi@shimonoseki-cu.ac.jp

まず，第 2, 3 節で問題の背景について詳述し，第 4 節で問題の定式化と計算手順について述べ，第 5 節で自然数の分割の考え方を利用し，求める確率の計算がシステマティックな計算に置き換えられることを示す。さらに問題の確率の計算には膨大な記号計算が必要となるので，第 6 節で記号計算システム Maple V によるプログラミングとその実行結果について報告する。インドの統計学者ラオ教授も同じ確率を計算し，その値が 0.289 となることを計算結果のみ報告（参考文献 [1] p.213）しているが，われわれは厳密な値とその不動小数点近似値（10 桁）を求める。

2 ビュホンの針の問題

複雑な積分や面積の計算，未知母数の推測問題などの数学的に込み入った問題はモンテ・カルロ法によるシミュレーションを用いて解くことが出来る。このモンテ・カルロ法の起源がビュホンの針の問題と呼ばれる次の問題である。18 世紀のフランスの自然科学者であったビュホン (Comté de Buffon) は，床の上に間隔が a の平行線が一面に引かれた床の上に長さ $l(<a)$ の針をランダムに投げた場合，その針が平行線と交わる確率が

$$\rho = \frac{2l}{\pi a} \tag{1}$$

であることを突き止めた。ここで針を N 回 (N は十分大きい数である) 投げる実験を行ったところ，針が平行線と R 回交わったとしよう。このとき

$$\frac{R}{N} \to \rho \qquad (N \to \infty)$$

が成り立つ，この収束は概収束である。この結果，N が十分大きいとき $\dfrac{R}{N} \approx \dfrac{2l}{\pi a}$ が成り立つので，π の近似値が

$$\pi \approx \frac{N}{R} \cdot \frac{2l}{a} \tag{2}$$

として得られるというものである。

3 実験へのいくつかの取り組み

第 2 節で述べたように，多数回にわたって針を機械的に投げれば π の近似値を求めることができる。このような実験は忍耐力の要るものであるが，いくつかの実験結果が報告されている (参考文献 [1] による)。まず，フランクフルトのウォルフ (Wolf) 教授が，1850 年から 1860 年の間に 36 ミリの針を 45 ミリ間隔の平行線上に 5,000 回投げ，針は線と 2,352 回交わったという記録が残っている。この場合 (2) により，π の値は 0.6%の誤差を持つ 3.1416 となる。さらに 1890 年から 1900 年にかけて，フォックス (Captain Fox) は 1,200 回の追加実験を試み，前者に比べわずかながら精度の良い $\pi = 3.14159$ という値を得たとされている。このような実験による π のもっとも正確な近似値としては，イタリアの数学者ラッザリニ (Lazzarini) によるものがある。彼は数学の定期刊行物 (Periodico di Mathematica,1901) において，3,408 回の試行中 1,808 回成功したことを詳細に報告している。彼の実験結果によれば，π の近似値は $l/a = 5/6$ としたとき，(2) より

$$\pi \approx \frac{5}{3}\frac{3408}{1808} = \frac{355}{113} = 3.1415929\cdots$$

となる。この値は少数第 6 位まで真の値と一致している。ところで上式の右辺の真ん中に現れる有理数 355/113 は，π の少ない桁数からなる有理数近似として 5 世紀に中国の数学者祖冲之 (Tsu Chung-Chih) によって導かれたものであり，この有理数に次ぐ π の有理数による近似値は 52163/16604 で，分母子に多くの桁数の数が必要となる。そこで，ラッザリニの実験結果の比から有理数 355/113 が出てくる計算過程を考えてみると

$$\frac{5}{3}\frac{3408}{1808} = \frac{5}{3}\frac{16 \times 213}{16 \times 113} = \frac{5}{3}\frac{\times 213}{\times 113} = \frac{355}{113}$$

となり，ラッザリニのたくらみが明白になる。このことはグリッジマン (N.T.Gridgeman, Scripta Mathematica,1961) とオベルイネ (T.H.O'beirne, The New Scientist,1961,p.598) により独立に明らかにされた。すなわち $l/a=5/6$ としたとき 355/113 という値を得るには，R/N として 113/213 という比の値，言い換えれば，最低 213 回の試行中 113 回の成功，または $213k$ 回目の試行中ちょうど $113k$ 回の成功を得なければならない。ラッザリニの場合 k の値が 16 であったのではないかというのである。ここで，2 つの可能性が考えられる。まず第一は，ラッザリニは論文中に詳述した実験を一度も行わず，そのかわり自分が望んでいた数を報告したに過ぎないという可能性である。第二は 213 回の実験をひとまとまりとして，彼が望む成功の回数が得られたときに実験を止めた可能性が考えられる。この論文では，後者の可能性について考える。すなわち，ラッザリニの実験で行われたように 16 回までの繰り返しによって，意図した成功の回数が得られる確率を計算する。

4 問題の定式化

この節では，第 3 節末で述べた確率の計算をするための問題の定式化と計算手順について述べる。213 回の針投げの実験を 1 組の試行とし，F_k を k 組目の試行 ($213k$ 回の針投げ実験) において，はじめて $113k$ 回の成功がおこる事象とすれば，16 組目までの試行において意図した成功 (針が平行線と交わる) の確率 113/213 が得られる確率は，$P(\bigcup_{k=1}^{16} F_k)$ と書けるが，事象 $F_1, F_2, \cdots, F_{16}$ たちは互いに排反な事象であるから

$$P(\bigcup_{k=1}^{16} F_k) = \sum_{k=1}^{16} P(F_k) \tag{3}$$

となる。$P(F_k)$ $(k=1,2,\cdots,16)$ を直接求めることは難しいが，k 組目の試行において $113k$ 回の成功が起こる事象 E_k の確率は，2 項分布に従うので

$$P(E_k) = \binom{213k}{113k} \rho^{113k}(1-\rho)^{100k} \quad k=1,2,\cdots 16, \tag{4}$$

により計算が可能である。ここで，ρ は (1) で与えられる。以下，$P(F_k)$ を $P(E_j)$ $(j=1,2,\cdots k)$ を用いて表すことを考える。まず，1 組目の実験では 213 回の実験を終了するまで止められないので，事象 F_1 は事象 E_1 に一致する。すなわち

$$P(F_1) = P(E_1).$$

次に $P(F_2)$ について考える。事象 F_2 は E_1 が起こらないで E_2 が起こることだから

$$\begin{aligned} P(F_2) &= P(\bar{E_1} \cap E_2) \\ &= P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

となる。ここで，$\bar{E_1}$ は E_1 の余事象を表す。さて，一般に事象 $E_i \cap E_j$ $(1 \le i < j)$ は，事象 E_i が起こり，引き続き事象 E_{j-i} が起こることであり，この 2 つの事象は独立だから

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_{j-i})$$

が成り立つ。この関係式を用いれば $P(E_1 \cap E_2) = P^2(E_1)$ が成り立つから

$$P(F_2) = P(E_2) - P^2(E_1) \tag{5}$$

となる。同様の考え方で

$$\begin{aligned} P(F_3) &= P(\bar{E_1} \cap \bar{E_2} \cap E_3) \\ &= P(\overline{E_1 \cup E_2} \cap E_3) \\ &= P(E_3) - P\{(E_1 \cup E_2) \cap E_3)\} \\ &= P(E_3) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= P(E_3) - 2P(E_1)P(E_2) + P^3(E_1) \end{aligned} \tag{6}$$

を得る。$P(F_4)$ 以降は煩雑になる。

$$\begin{aligned}P(F_4) &= P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap E_4)\\ &= P(\bar{E}_1 \cap \overline{E_2 \cup E_3} \cap E_4)\\ &= P(E_4) - P(E_1 \cap E_4) - P\{(E_2 \cup E_3) \cap E_4\} + P\{E_1 \cap (E_2 \cup E_3) \cap E_4\} \qquad (7)\end{aligned}$$

(7) の第 3, 4 項はそれぞれ

$$\begin{aligned}P\{(E_2 \cup E_3) \cap E_4\} &= P\{(E_2 \cap E_4) \cup (E_3 \cap E_4)\}\\ &= P(E_2 \cap E_4) + P(E_3 \cap E_4) - P\{(E_2 \cap E_4) \cap (E_3 \cap E_4)\}\\ &= P^2(E_2) + P(E_1)P(E_3) - P^2(E_1)P(E_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{E_1 \cap (E_2 \cup E_3) \cap E_4\} &= P\{(E_1 \cap E_2 \cap E_4) \cup (E_1 \cap E_3 \cap E_4)\}\\ &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + P(E_1 \cap E_3 \cap E_4) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)\\ &= 2P^2(E_1)P(E_2) - P^4(E_1)\end{aligned}$$

となるから，これらを (7) に代入して

$$P(F_4) = P(E_4) - 2P(E_1)P(E_3) - P^2(E_2) + 3P^2(E_1)P(E_2) - P^4(E_1) \qquad (8)$$

となる。同様の考え方を繰り返すことによって $P(F_5)$ を求めると

$$\begin{aligned}P(F_5) = P(E_5) &- 2P(E_1)P(E_4) - 2P(E_2)P(E_3) + 3P(E_1)P^2(E_2)\\ &+ 3P^2(E_1)P(E_3) - 4P\ 3(E_1)P(E_2) + P^5(E_1) \qquad (9)\end{aligned}$$

となり，7 項からなる式を得る。さらに $P(F_6)$，$P(F_7)$，$P(F_8)$ と順次計算して行くと，それぞれの式に含まれる項数は 11, 15, 22 と単調に増加し，$P(F_{16})$ では 231 項となる (第 6 節の Maple の出力結果参照)。したがって，この節で述べたような計算手順を繰り返す方法によって $P(F_{16})$ を正確に計算することはほぼ不可能であると思われる。

5 自然数の分割と $P(F_k)$ の計算

前節で見たように，$P(F_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は各項が二項確率の積からなる多項式である ((5),(6),(8),(9) 参照) が，各項を詳しく調べてみると，それらが「自然数の分割 (partition)」の考え方を用いるとシステマティックに構成できることに気づく。この節では，その構成法について述べる。本題に入る前にいくつかの準備をしておく。まず，自然数 n の分割について述べる。

[定義] 自然数 n の分割とは，n を自然数の和で表したものである。ただし，和で表すときの順序は問わないものとする。また自然数 n の異なる分割の個数を分割数といい $p(n)$ と表す。

「例」 自然数 5 の分割は，

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

のように全部で 7 通りあり (5 自身も分割とみなす)，$p(5) = 7$ である。
記号計算システム Maple では任意の自然数の分割を簡単に計算してくれる。例えば 5 の分割を求めるのであれば

```
>with(combinat):
```

と分割数を扱うパッケージを読み込み，

```
>partition(5);
```

とコマンドを入力すると，5 のすべての分割が

$$[\ [1,1,1,1,1], [1,1,1,2], [1,2,2], [1,1,3], [2,3], [1,4], [5]\ ]$$

とリスト(Mapleでは，[ ]で囲まれた数字の集まりをリストと呼び，1組のデータとして扱う)の形で与えられる。並べ方は，辞書式順序で数が大きくなる順序になっている。ここでいくつかの記号を導入しておく，まず分割はMapleの出力のように並んでいるものとする。このとき自然数 k の $i(i=1,2,\cdots,p(k))$ 番目の分割を $b_{k,i}$, その分割の要素の数を $n_{k,i}$ と，それぞれ書くことにする。さらに，分割 $b_{k,i}$ の j $(j=1,2,\cdots,n_{k,i})$ 番目の要素を $b_{k,i}(j)$ と書き，分割 $b_{k,i}$ の要素で $l(l=1,2,\cdots k)$ に等しい要素の数を $n^l_{b_{k,i}}$ とする。

「例」 $b_{5,2}=[1,1,1,2]$, $n_{5,2}=4$, $b_{5,2}(4)=2$, $n^1_{b_{5,2}}=3$

以上の準備をしておくと，$P(F_k)$ $(k=1,2,\cdots 16)$ に現れる各項の形は，自然数 k の分割に対応させることによって以下のようにシステマティックに書ける。

1. $P(F_k)$ に現れる項数は自然数 k の分割数 $p(k)$ に等しい。
   「例」 $P(F_5)$ は $p(5)=7$ 項からなる。

2. $P(F_k)$ の第 $i(i=1,2,\cdots,p(k))$ 項を構成する係数を含まない因子は分割 $b_{k,i}$ の要素を添え字にもつ事象 $E_{b_{k,i}(j)}$($j=1,\cdots,n_{k,i}$) の確率となる。すなわち第 i 項の確率は
$$\prod_{j=1}^{n_{k,i}} P(E_{b_{k,i}(j)}) \tag{10}$$
   と書ける。
   「例」 $k=5$ のとき，第2項 $(i=2)$ の確率は，分割 $b_{5,2}=[1,1,1,2]$ に対応させて考えればよいから $\prod_{j=1}^{n_{5,2}} P(E_{b_{5,2}(j)}) = \prod_{j=1}^{4} P(E_{b_{5,2}(j)}) = P^3(E_1)P(E_2)$ となる。

3. $P(F_k)$ の第 i 項の係数は，分割 $b_{k,i}$ の $n_{k,i}$ 個の要素を並べる順列の総数に符号 $(-1)^{n_{k,i}+1}$ を乗じたものに等しい。すなわち第 i 項の係数は
$$(-1)^{n_{k,i}+1}\frac{n_{k,i}!}{\prod_{l=1}^{k} n^l_{b_{k,i}}!} \tag{11}$$
   と書ける。
   「例」 $k=5$ のとき，第2項 $(i=2)$ の係数は，分割 $b_{5,2}=[1,1,1,2]$ の4個の要素1,1,1,2を並べる順列の総数 $\dfrac{4!}{3!1!}=4$ に符号 $(-1)^{4+1}=-1$ を掛けて -4 となる。

以上から，確率 $P(F_k)$ $(k=1,2,\cdots 16)$ は
$$P(F_k)=\sum_{i=1}^{p(k)}(-1)^{n_{k,i}+1}\frac{n_{k,i}!}{\prod_{l=1}^{k} n^l_{b_{k,i}}!}\prod_{j=1}^{n_{k,i}} P(E_{b_{k,i}(j)}) \tag{12}$$
と書ける。

6 Mapleを用いた $\sum_{k=1}^{16} P(F_k)$ の計算

この節では，前節で導いた(12)を用いて確率 $\sum_{k=1}^{16} P(F_k)$ を具体的に計算する。しかし，この確率は914項の和からなる式で，各々の項は二項確率の積の形で表されるため，膨大な計算量となる。そこでわれわれはシンボリックな計算が可能なMapleを用いて計算することにした。前節で述べた手順をMapleでプログラミングすると次のようになる。ただし，#の後ろはコメント文である。

```
> #Calculation of the probability of getting the right number of successes
> # produced by Shunji Ouchi(August,2002)
> with(combinat):with(stats):with(describe):#以下の計算をするために必要なパッケージを読み込む。
> n:=213:l:=113:rho:=5/(3*Pi):#必要な定数を読み込む。
> kaijyou:= k - > mul(i, i=1..k ):#k の階乗を定義する。
> Pe:=x - > binomial(n*x, l*x)*(1-rho)^(n*x-l*x)*rho^(l*x):#2 項確率を定義する。
```

> ProbF.1:=Pe(1):#$P(F_1)$ を $P(E_1)$ と定義する。

> for p from 2 to 16 do#for ループの始まり。

> bunkatu:=partition(p):#自然数 p の分割を bunkatu という名前のリストにする。

> eachP:= [seq(mul(PE[j], j=bunkatu[i]), i=1..numbpart(p))]:#(10) を分割数 $p(p)$ 個計算し，eachP という名前のリストにする。

> countN:=[seq([seq(nops(select(x − > is(x=i),bunkatu[j])), i=1..p)], j=1..numbpart(p))]:#1 から p までの数が各分割の中に何個あるか数え，countN という名前のリストにする。

> kakezanN:=[seq(sumdata(countN[j]), j=1..numbpart(p))]:#$P(F_p)$ の各項が何個の因子の積か数え，kakezanN という名前のリストにする。

> bunsikai:=map(kaijyou, kakezanN):#符号を除いた係数 (11) の分子を計算する。

> keisuu:=[seq(bunsikai[i]/mul(kaijyou(countN[i][j]), j=1..p), i=1..numbpart(p))]:#符号を含まない係数 (11) を計算し，keisuu という名前のリストにする。

> termP:=[seq((-1)^(nops(bunkatu[i])+1)*keisuu[i]*eachP[i], i=1..numbpart(p))]:#(11)×(10) を分割数 $p(p)$ 個計算し，termP という名前のリストにする。

> PF.p:=sumdata(termP):#(12) を計算する。

> ProbF.p:=subs(seq(PE[j]=Pe(j), j=1..numbpart(p)), PF.p):#(12) の中の $P(E_*)$ に (4) の右辺 (2 項確率の式) を代入する。

> od:#for ループの終わり。

ここでは，紙幅の制約上 $P(F_{16})$ の出力結果のみ示すことにする。以下では $P(E_j)$ を PE_j と表示している。

$$P(F_{16}) = 3 PE_2^2 PE_{12} + 6 PE_1 PE_7 PE_8 + 6 PE_3 PE_6 PE_7 + 3 PE_4^2 PE_8 + 6 PE_3 PE_5 PE_8 + 3 PE_1^2 PE_{14} +$$
$$6 PE_1 PE_3 PE_{12} + 3 PE_3^2 PE_{10} + 6 PE_2 PE_3 PE_{11} + 6 PE_1 PE_5 PE_{10} + 6 PE_1 PE_6 PE_9 + 6 PE_3 PE_4 PE_9 +$$
$$3 PE_5^2 PE_6 + 6 PE_1 PE_2 PE_{13} + 6 PE_2 PE_4 PE_{10} + 6 PE_1 PE_4 PE_{11} + 6 PE_2 PE_5 PE_9 + 6 PE_2 PE_6 PE_8 -$$
$$120 PE_1 PE_2 PE_3^3 PE_4 + 252 PE_1^6 PE_2 PE_4^2 - 420 PE_1^4 PE_2^2 PE_4^2 - 60 PE_2^3 PE_3^2 PE_4 +$$
$$630 PE_1^2 PE_2^2 PE_3^2 PE_4 + 252 PE_1^6 PE_3^2 PE_4 - 840 PE_1^4 PE_2 PE_3^2 PE_4 + 140 PE_1^3 PE_3^3 PE_4 +$$
$$210 PE_1 PE_2^4 PE_3 PE_4 + 1512 PE_1^5 PE_2^2 PE_3 PE_4 - 1120 PE_1^3 PE_2^3 PE_3 PE_4 - PE_8^2 - 2 PE_7 PE_9 -$$
$$2 PE_6 PE_{10} + 20 PE_1^3 PE_5 PE_8 - 720 PE_1^7 PE_2 PE_3 PE_4 + 420 PE_1^3 PE_2 PE_3 PE_4^2 + 3 PE_2 PE_7^2 -$$
$$168 PE_1^5 PE_3 PE_4^2 - 15 PE_2^4 PE_4^2 + 6 PE_4 PE_5 PE_7 + 210 PE_1^2 PE_2^3 PE_4^2 + 15 PE_1^{14} PE_2 + 5 PE_3^4 PE_4 -$$
$$45 PE_1^8 PE_4^2 - 360 PE_1^7 PE_2^2 PE_5 - 12 PE_3 PE_4^2 PE_5 + 110 PE_1^9 PE_2 PE_5 - 14 PE_1^{13} PE_3 - PE_2^8 +$$
$$36 PE_1^2 PE_2^7 - 210 PE_1^4 PE_2^6 + 462 PE_1^6 PE_2^5 - 495 PE_1^8 PE_2^4 + 286 PE_1^{10} PE_2^3 - 12 PE_1^{11} PE_5 +$$
$$10 PE_2^2 PE_4^3 + 20 PE_1 PE_3 PE_4^3 - 91 PE_1^{12} PE_2^2 - PE_1^{16} - 60 PE_1^2 PE_2 PE_4^3 - 90 PE_1^2 PE_3^2 PE_4^2 +$$
$$30 PE_2 PE_3^2 PE_4^2 + 35 PE_1^4 PE_4^3 + 110 PE_1^9 PE_3 PE_4 - 30 PE_1^4 PE_2 PE_{10} + 30 PE_1^2 PE_2^2 PE_{10} +$$
$$20 PE_1^3 PE_3 PE_{10} + 42 PE_1 PE_2^5 PE_5 - 90 PE_1^8 PE_3 PE_5 + 20 PE_1^3 PE_4 PE_9 - 1260 PE_1^5 PE_2^4 PE_3 +$$
$$60 PE_1^2 PE_2 PE_3 PE_9 + 7 PE_1^6 PE_{10} - 12 PE_1 PE_2^2 PE_{11} - 12 PE_1^2 PE_3 PE_{11} - 12 PE_1^2 PE_2 PE_{12} -$$
$$4 PE_1^3 PE_{13} + 30 PE_1^2 PE_3^2 PE_8 - 30 PE_1^4 PE_4 PE_8 - 12 PE_2^2 PE_4 PE_8 - 24 PE_1 PE_3 PE_4 PE_8 -$$
$$24 PE_1 PE_2 PE_5 PE_8 - 12 PE_1^2 PE_6 PE_8 + 60 PE_1^2 PE_2 PE_4 PE_8 - 280 PE_1^3 PE_2^4 PE_5 - 30 PE_1^4 PE_3 PE_9 +$$
$$156 PE_1^{11} PE_2 PE_3 - 120 PE_1^3 PE_2 PE_3 PE_8 + 60 PE_1 PE_2^2 PE_3 PE_8 - 8 PE_1^7 PE_9 + 42 PE_1^5 PE_2 PE_9 -$$
$$60 PE_1^3 PE_2^2 PE_9 + 20 PE_1 PE_2^3 PE_9 - 12 PE_2^2 PE_3 PE_9 - 12 PE_1 PE_3^2 PE_9 - 24 PE_1 PE_2 PE_4 PE_9 -$$
$$12 PE_1^2 PE_5 PE_9 - 4 PE_2^3 PE_{10} - 24 PE_1 PE_2 PE_3 PE_{10} - 12 PE_1^2 PE_4 PE_{10} + 504 PE_1^5 PE_2^3 PE_5 +$$
$$504 PE_1^6 PE_2 PE_3 PE_5 + PE_{16} + 5 PE_1^4 PE_{12} - 120 PE_1 PE_2^3 PE_4 PE_5 + 210 PE_1^4 PE_3 PE_4 PE_5 +$$
$$60 PE_2^2 PE_3 PE_4 PE_5 + 60 PE_1 PE_3^2 PE_4 PE_5 + 20 PE_1^3 PE_2 PE_{11} + 420 PE_1^3 PE_2^2 PE_4 PE_5 +$$
$$72 PE_1^7 PE_4 PE_5 + 20 PE_2 PE_3^3 PE_5 - 336 PE_1^5 PE_2 PE_4 PE_5 + 1260 PE_1^4 PE_2^3 PE_3^2 -$$
$$180 PE_1 PE_2^2 PE_3^2 PE_5 - 60 PE_1^2 PE_3^3 PE_5 + 3 PE_4 PE_6^2 + 420 PE_1^3 PE_2 PE_3^2 PE_5 -$$
$$30 PE_2^4 PE_3 PE_5 - 1260 PE_1^6 PE_2^2 PE_3^2 + 495 PE_1^8 PE_2 PE_3^2 - 66 PE_1^{10} PE_3^2 - 168 PE_1^5 PE_3^2 PE_5 +$$
$$420 PE_1^2 PE_2^3 PE_3 PE_5 - 6 PE_1^5 PE_{11} - 2 PE_5 PE_{11} - 2 PE_4 PE_{12} - 2 PE_3 PE_{13} - 2 PE_2 PE_{14} -$$
$$2 PE_1 PE_{15} - 840 PE_1^4 PE_2^2 PE_3 PE_5 - 56 PE_1 PE_2^6 PE_3 + 504 PE_1^3 PE_2^5 PE_3 + 1320 PE_1^7 PE_2^3 PE_3 -$$
$$660 PE_1^9 PE_2^2 PE_3 + 140 PE_1 PE_2^3 PE_3^3 + 252 PE_1^6 PE_2^2 PE_6 - 560 PE_1^3 PE_2^2 PE_3^3 - 90 PE_1^8 PE_2 PE_6 +$$
$$11 PE_1^{10} PE_6 - 28 PE_1^6 PE_5^2 + 105 PE_1^4 PE_2 PE_5^2 + 504 PE_1^5 PE_2 PE_3^3 - 12 PE_2 PE_4 PE_5^2 -$$

$$
\begin{array}{l}
4\,PE_1 PE_5{}^3 + 30\,PE_1{}^2 PE_4 PE_5{}^2 - 120\,PE_1{}^7 PE_3{}^3 + 60\,PE_1 PE_2 PE_3 PE_5{}^2 + 21\,PE_2{}^5 PE_3{}^2 - \\
90\,PE_1{}^2 PE_2{}^2 PE_5{}^2 + 10\,PE_2{}^3 PE_5{}^2 - 60\,PE_1{}^3 PE_3 PE_5{}^2 - 6\,PE_3{}^2 PE_5{}^2 - 180\,PE_1 PE_2{}^2 PE_3 PE_4{}^2 - \\
420\,PE_1{}^2 PE_2{}^4 PE_3{}^2 - 60\,PE_1{}^3 PE_4{}^2 PE_5 + 60\,PE_1 PE_2 PE_4{}^2 PE_5 - 360\,PE_1{}^2 PE_2 PE_3 PE_4 PE_5 - \\
60\,PE_1{}^3 PE_3{}^2 PE_7 + 60\,PE_1 PE_2 PE_3{}^2 PE_7 + 20\,PE_2{}^3 PE_3 PE_7 - 4\,PE_3{}^3 PE_7 - 180\,PE_1{}^2 PE_2{}^2 PE_3 PE_7 - \\
56\,PE_1{}^6 PE_3 PE_7 + 210\,PE_1{}^4 PE_2 PE_3 PE_7 - 168\,PE_1{}^5 PE_2{}^2 PE_7 + 140\,PE_1{}^3 PE_2{}^3 PE_7 - \\
30\,PE_1 PE_2{}^4 PE_7 + 72\,PE_1{}^7 PE_2 PE_7 + 13\,PE_1{}^{12} PE_4 - 10\,PE_1{}^9 PE_7 - 15\,PE_1{}^4 PE_6{}^2 + 30\,PE_1{}^2 PE_2 PE_6{}^2 + \\
60\,PE_1 PE_2{}^2 PE_5 PE_6 + 60\,PE_1{}^2 PE_3 PE_5 PE_6 + 42\,PE_1{}^5 PE_5 PE_6 - 120\,PE_1{}^3 PE_2 PE_5 PE_6 - \\
24\,PE_2 PE_3 PE_5 PE_6 - 24\,PE_1 PE_4 PE_5 PE_6 - 6\,PE_2{}^2 PE_6{}^2 - 12\,PE_1 PE_3 PE_6{}^2 + 30\,PE_1{}^2 PE_4{}^2 PE_6 + \\
120\,PE_1 PE_2 PE_3 PE_4 PE_6 + 20\,PE_2{}^3 PE_4 PE_6 - 120\,PE_1{}^3 PE_3 PE_4 PE_6 - 180\,PE_1{}^2 PE_2{}^2 PE_4 PE_6 + \\
210\,PE_1{}^4 PE_2 PE_4 PE_6 - 56\,PE_1{}^6 PE_4 PE_6 - 12\,PE_3{}^2 PE_4 PE_6 - 12\,PE_2 PE_4{}^2 PE_6 + 20\,PE_1 PE_3{}^3 PE_6 - \\
180\,PE_1{}^2 PE_2 PE_3{}^2 PE_6 + 30\,PE_2{}^2 PE_3{}^2 PE_6 + 105\,PE_1{}^4 PE_3{}^2 PE_6 - 120\,PE_1 PE_2{}^3 PE_3 PE_6 - \\
336\,PE_1{}^5 PE_2 PE_3 PE_6 + 420\,PE_1{}^3 PE_2{}^2 PE_3 PE_6 + 72\,PE_1{}^7 PE_3 PE_6 - 6\,PE_2{}^5 PE_6 - 15\,PE_2{}^2 PE_3{}^4 + \\
105\,PE_1{}^2 PE_2{}^4 PE_6 + 105\,PE_1{}^2 PE_2 PE_3{}^4 - 70\,PE_1{}^4 PE_3{}^4 - 280\,PE_1{}^4 PE_2{}^3 PE_6 + 5\,PE_2{}^4 PE_8 + \\
42\,PE_1{}^5 PE_3 PE_8 - 168\,PE_1{}^2 PE_2{}^5 PE_4 - PE_4{}^4 + 7\,PE_2{}^6 PE_4 - 840\,PE_1{}^6 PE_2{}^3 PE_4 + \\
495\,PE_1{}^8 PE_2{}^2 PE_4 - 12\,PE_2 PE_3{}^2 PE_8 - 60\,PE_1{}^2 PE_2{}^3 PE_8 + 630\,PE_1{}^4 PE_2{}^4 PE_4 - 56\,PE_1{}^6 PE_2 PE_8 + \\
9\,PE_1{}^8 PE_8 + 105\,PE_1{}^4 PE_2{}^2 PE_8 - 6\,PE_1{}^2 PE_7{}^2 + 20\,PE_1{}^3 PE_6 PE_7 - 132\,PE_1{}^{10} PE_2 PE_4 + \\
60\,PE_1{}^2 PE_2 PE_5 PE_7 + 60\,PE_1 PE_2{}^2 PE_4 PE_7 - 120\,PE_1{}^3 PE_2 PE_4 PE_7 + 60\,PE_1{}^2 PE_3 PE_4 PE_7 - \\
30\,PE_1{}^4 PE_5 PE_7 - 24\,PE_2 PE_3 PE_4 PE_7 - 12\,PE_1 PE_4{}^2 PE_7 - 12\,PE_2{}^2 PE_5 PE_7 - 24\,PE_1 PE_3 PE_5 PE_7 - \\
24\,PE_1 PE_2 PE_6 PE_7 + 42\,PE_1{}^5 PE_4 PE_7 - 6\,PE_1 PE_3{}^5
\end{array}
$$

上式の PE_k に (4) の右辺を代入し計算すると，$P(F_{16})$ の厳密な値が求まる（出力結果はかなりの分量になるので，ここでは省略する)。さらに

> evalf(add(ProbF.p, p=1..16));#evalf は不動小数点近似を求めよというコマンド。

と，コマンドを入力することによって $\sum_{k=1}^{16} P(F_k)$ の値の不動小数点近似値 0.2887341333 を得る。この値の少数第 4 位を四捨五入したものは，ラオ教授の報告している値 0.289 に一致する。

7 おわりに

初等確率論においては，いくつかの事象の和事象や積事象の確率を計算する場面が多々ある。このような確率の計算は，事象の数が増えるとたちまち複雑になり，それらを正確に計算することは極めて困難になる。そのようなときに，第 5 節で示した自然数の分割の考え方を利用するとシステマティックな計算が可能になる場合があると思われる。また，実際の計算では 10 より大きい自然数の分割数は 50 を超えるので，それを正確に数え上げることは難しいが，Maple を利用すれば簡単に処理してくれる。このような意味で Maple を含む記号計算システムは，われわれがこれまで実際に計算することを諦めていた問題に対して希望を与えてくれるものと思う。私は Maple を，研究は元より，教育の面でも積極的に利用して行きたいと考えている。本年度の秋学期には，教養演習「記号計算システム Maple を用いた数学」という科目を開講するが，その中で学生の主体的な思考活動のための道具として Maple を活用したいと思う。参考文献 [7], [8] には，少人数ゼミナールで行われた算額の問題解決における Maple の興味深い利用法が述べられている。

謝辞

本研究に際し，問題の所在に関する示唆および第 4 節における問題の定式化は，千葉大学の田栗正章教授によるものであります。先生には長年に亘るご指導への感謝の意も込めて厚く御礼申しあげます。

参考文献

[1] C.R. Rao 著, 藤越康祝, 柳井晴夫, 田栗正章共訳 (1993).『統計学とは何か—偶然を生かす』, 丸善.

[2] 宮武修, 脇本和昌 (1978).『乱数とモンテ・カルロ法』, 森北出版.

[3] 大内俊二 (1993). Buffon の“針”の問題の“正多角形”への拡張—理論・シミュレーション・実験のための教材として, 日本数学教育学会誌, 第 75 巻 9 号, 27 − 32.

[4] R. Isaac(1995). The Pleasures of Probability, Springer-Verlag, New York.

[5] 示野信一 (1998).『Maple V Release 5 ラーニングガイド』, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[6] K.M.Heal, M.L.Hansen, K.M.Rickard 著, 示野信一他訳 (1999).『Maple V で見る数学ワールド』, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[7] 高遠節夫 (1997). 問題解決ツールとしての数式処理—「一般特別研究」における利用, 日本数学教育学高専部会研究論文誌, 第 4 巻, 第 1 号, 5 − 14.

[8] 高遠節夫 (1998). 和算の三角形問題の MNR 法による数式処理的解法, 日本数学教育学高専部会研究論文誌, 第 5 巻, 第 1 号, 43 − 52.

[9] W. Feller 著, 河田龍夫監訳 (1972).『確率論とその応用 I 上』, 紀伊国屋書店.