多目的意思決定とファジィ線形計画モデル

——非線形メンバーシップ関数適用の射程——

小 野 博 則

はじめに

意思決定論では，複数の代替的選択案の中で最適なものを決定するために，その規範となる選択原理を明確にすることがその中核に置かれている。意思決定の全過程は，(a) 問題の発見，(b) 環境条件の問題に与える影響の評価，(c) 問題解決のための諸代替案の提示，(d) 選択原理の設定，(e) 代替案の比較，(f) 選択原理に従う最適案の決定，によって構成される。

こうした決定論的アプローチは，経営における計画問題に対処するため管理会計モデルにも適用され，問題解決の有用な情報を提供してきた。この種の手法の一つとして，新しい視点を取込ながら管理・計画への適用領域を広げつつある多目的線形計画（multiple objective linear programming，以下，MOLP と表示する）法がある。ファジィ環境下での MOLP 法の利用の可能性に関する研究は，ヨリ現実的な応用という側面においても新しい領域を開くものであるし，また，アプローチそれ自身に対する本質的な問い掛けを含むという側面でもアンビシャスであると考えられる。

もとより，決定論的アプローチは，これを実行するために数量化とモデル化の過程を前提しなければならない。その方法論上の特徴が，厳密な思考に裏付けされた論理整合的な解に導き，意思決定を支援する有用な情報を生み出すことに寄与してきたことは，論を待たない。

一方，重要であっても定量的分析になじみにくい質的な要因，意思決定というものが本来備えている未来志向的な性格に起因する不確実性，人の判断に混在する感性や模糊とした情緒，日常的な言語表現に自ずから含まれている曖昧さ，そして，過去の経験の積重ねや勘に依拠し整然とした因果関係によっては説明されにくい無秩序，などにどのように対処しモデルに組込んでいくかということが，決定論的アプローチによってもたらされる情報の質や有効性に軽視できぬ影響をもたらすことは，先行研究において指摘されながらも，いまだ解決されるべき多くの問題を抱えているという現実がある。このような諸種の不確かな要素は，不確実性（randomness），曖昧性（fuzziness），多義性（ambiguity）として概念を峻別して研究が進められている。

このうち曖昧性については，メンバーシップ関数によって規定されるファジィ集合の考え方によって，明確な定義を施され，数理的な操作を可能にされるようになっていることは，周知であろう。ファジィ概念の MOLP モデルへの導入は，曖昧性を孕む現実世界に接近するように数理モデルを修正する側面と，複数の目的を調整する最良の妥協解を選択する原理として採用する側面を合わせ持っている。この手法の核心にある特徴は，曖昧性という個人の主観の付帯する概念をメンバーシップ関数で表現することにある。メンバーシップ関数の形態に個人の主観を反映させることによって，個人的な主観を数学的に処理することが可能になった故に，メンバーシップ関数の決定過程においていかに主観を忠実に反映させ，歪みや恣意性を排除するかという問題にも光が当てられるようになった。線形メンバーシップ関数から非線形メンバーシップ関数の適用への拡張も，この点から見ると必然的な展開であるように考えられる。

非線形メンバーシップ関数の適用は，指数関数や双曲線で試みられてきた。そこでは，非線形メンバーシップ関数を通常の線形計画法に帰着させて最適解を求める手続きを取っている。それは，メン

バーシップ関数の範囲を非線形関数へと拡張して，ヨリ現実的なモデルを追究しながらも，解法上は同一解を持つ通常の線形計画モデルに帰着させざるを得ない背反を伴う。つまり，通常の線形計画法へ還元しうるような形態の非線形メンバーシップ関数に限定されるという解法上の技術的制約が存在する。

このような状況が示唆するものを探り，非線形メンバーシップ関数の適用の射程について再検することも意味のないことではあるまい。こうした問題意識を踏まえつつ，多目的意思決定モデルにおけるファジィ概念の利用を考える際に，現実性の取込みとしての曖昧性の導入，そして選択原理としてのファジィ決定理論の導入の側面から光を当て，論を進めることにする。拙稿では，非線形メンバーシップ関数として無理関数の採用を試み，ファジィ線形計画モデルの操作の簡便性が最も端的に現われるシンプレックス・アルゴリズムとの関連において，その解法とパラメトリック分析を示し，非線形メンバーシップ関数適用の意味と可能性に一考を与えたい。

I　選択原理としてのファジィ決定

多目的意思決定を行なう有効な手法として，ファジィ線形計画法がある。複数の目的関数にファジィ不等式を設定し，メンバーシップ関数を用いて特性づけることによって，パレート効率的な最適解を求める手法である。目標水準の境界に幅があり，希求される目標水準からの乖離の大きさに応じて許容できる程度を一意に決めることができ，この関係をメンバーシップ関数で表現できるならば，複数の目的に対応して設定されたメンバーシップ関数を用い，何らかの最適化決定（maximizing decision）のルールを適用して最適案を決定することができる。こうして先ず，複数の目的間に最良の妥協解を決定する選択原理を導入できるならば，境界条件が不確定なファジィ環境下にある制約式が存在する場合も，これに対して同一の選択原理を適用できる。選択原理の適用の次元において目標と制約の違いは無い。

MOLP 法を解くときには，目的関数にファジィ目標を設定し，ファジィ線形計画モデルに変換することによって，複数の目標水準達成の満足度を極大化する解が求められる。この解法の特徴は，目標水準の達成度合についての満足度，あるいは，目標水準からの乖離に対する許容度という主観に，メンバーシップ関数に基づく定量的な表現を与えたことに基礎づけられている。

無論，メンバーシップ関数は曖昧性をシステマティックに扱うファジィ理論を組立てる手段であり，境界に不確かさを含むファジィ集合を各要素のその集合への帰属性の度合によって特性づける役割を持っている。目標水準を巡る現実の曖昧な達成水準の集合も，メンバーシップ関数を用いればファジィ集合として認識されうる。また同時に，それは，目標水準を巡る現実の達成水準に対する満足の度合や許容の度合を表現していると見做すことも可能である。ファジィ理論は，諸種の事象や概念が持っている曖昧性を決定論的アプローチに取込むことを可能にすると同時に，目標値へ向けての達成の程度を満足度で表わすメンバーシップ関数を定義することを通して，満足化基準に依拠して意思決定を進める枠組としても機能しているのである。

希求する標的値への達成度を満足度として表現する，あるいは，目標値からの乖離に対する許容度を表現するメンバーシップ関数を設定し，複数個のメンバーシップ関数値から最小オペレータ（min-operator）[1]に基づくファジィ決定[2]によってもたらされるファジィ共通集合を求め，その集合に帰属する度合い，換言すれば，満足度や許容度を最大化するファジィ解を求めるという手順を追って，ファジィ線形計画モデルは解かれる。

ファジィ集合 $\tilde{E}$ が，曖昧な概念によって規定された集合であり，その境界が曖昧で明確な線引きができない場合，ある全体集合 $X=\{x\}$ を想定し，その上にある $\tilde{E}$ は，メンバーシップ関数 $\mu_E(x)$ を用いて順序対の集合として次のように定義される。

$$\tilde{E}=[x,\mu_E(x)],\ x\in X \tag{1}$$

ここで，$\mu_E(x)$ は，集合の境界を滑らかにする関数で，要素 x がファジィ集合 $\tilde{E}$ に帰属する度合を，$0\leqq\mu_E(x)\leqq1$ の数値で示す。帰属しない場合は 0，完全に帰属する場合は 1 で表わし，帰属度が大きくなるほど 1 に近づく。

全体集合 X を選択可能な代替案の集合とすると，曖昧な目標水準，すなわちファジィ目標という集合は，X 上のファジィ集合 $\tilde{E}$ として，メンバーシップ関数 $\mu_E(x)$ を用いて定義される。$\mu_E(x)$ は要素 x がファジィ集合 $\tilde{E}$ に帰属する度合を表わしている

が，同時に代替的選択案 x が目標水準として希求される満足の程度を表わしているとも考えることができる。i 個のファジィ集合 $\tilde{E}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ がある時，$\tilde{E}_i$ を同時に満たす共通集合 $\tilde{D}$ は $\tilde{D} = \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 \cap \cdots \cap \tilde{E}_n$ と表わされる。

この共通集合 $\tilde{D}$ は，次のようなメンバーシップ関数 $\mu_D(x)$ で特性づけられるファジィ集合であると定義される。

$$\mu_D(x) = \min_{1 \leq i \leq n} [\mu_{Ei}(x)] = \mu_{E1}(x) \wedge \mu_{E2}(x) \wedge \cdots \wedge \mu_{En}(x) \qquad (2)$$

得られたファジィ共通集合 $\tilde{D}$ の要素である代替案の中で，$\tilde{D}$ に帰属する度合 $\mu_D(x)$ が最大化される最適な代替案を選択する最大化決定（maximizing decision）[3] が行なわれることによって，ファジィ決定に始まる一連の操作，すなわち選択原理としての機能は完結することになる。最適代替案 x^* を選択する最大化決定のプロセスは，以下のように表わされる。

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \min_{1 \leq i \leq n} [\mu_{Ei}(x)] \qquad (3)$$

同時に達成しなければならない複数の目的が存在し，各目的が相互にコンフリクトを持つ場合や非通約的（noncommensurable）である場合には，個別に各目的の最適化を追求することはできず，各目的を調整して最適な妥協解（compromise solution）を見出す以外に方法はない。最適な妥協解を見出す選択原理の違いによって，諸種の手法に分かれる。もっとも，最適な妥協とは，他の目的のいずれも改悪することなく，ある目的を改善することができないような状態，つまりパレート最適が達成されている状態を前提とした妥協を意味している。こうした妥協解を決定するための選択原理の一つとして，ファジィ決定や最大化決定は用いられる。

メンバーシップ関数は，曖昧な概念によって規定された集合を特性づけるために用いられてきた関数であるが，1980年代からは可能性分布と解釈する見方が導入され，可能性理論へと展開している。メンバーシップ関数はどのようなことが許容されるかの可能性の度合を与えるとする観点からは，ファジィ目標という曖昧な目標水準によって規定される集合は，目標水準からの乖離を許容する可能性の度合を与えるメンバーシップ関数によって特性づけられる集合であると考えることもできる。そして，目標水準からの乖離を許容する可能性の度合は，その乖離が小さくなり，それを許容できる可能性の度合が大きくなればなるほど，満足できる可能性の度合も大きくなると言い換えても良い。

最適化原理から，複数の目的を調整して最良の妥協に至る満足化原理への移行は，メンバーシップ関数を目標水準からの乖離に対する満足の可能性の度合と解することによって，容易に架橋されうる。最小オペレータによって決定されたファジィ共通集合の中から可能性の度合が最大になる代替案が選択され，それを通じて目標水準からの乖離に対する満足の可能性が最大となる代替案が選択されることを，最良の妥協解の決定とする考えには，必然性に可及的に近い可能性を見出そうとする視点がある。選択原理としての有効性をそこに認めることができよう。

II　線形メンバーシップ関数と非線形メンバーシップ関数

ファジイ理論によって主観が科学に取込まれ，人の行動や思考には往々に現われる曖昧さや部分的無知を認め，その中でヨリ良い決定や推論を行なうメカニズムが形成されるようになった。そして，その現実への応用が多面的に試みられようとしているが，最終的に算出される最適解がメンバーシップ関数の形態に依存する点を考慮すると，ファジィ環境や意思決定者の主観に即応したメンバーシップ関数を設定することの意味は大きい。本来，メンバーシップ関数は主観に基づいて定められるものであるが，従来の効用分析的な方法に加えて，諸分野の成果を用いて諸種の方法が提案されている[4]。経験的方法と数学的方法のいずれにせよ，線形関数から非線形関数へと展開し，多様な形態のメンバーシップ関数が用いられるようになっている。

メンバーシップ関数が線形であるファジィ線形計画モデルは，最小オペレータと最大化決定によって通常の線形計画モデルに変換して解を求めることができることは，既に明らかにされている[5]。そこで，非線形メンバーシップ関数として無理関数の適用による解法を試みる前に，まず，線形メンバーシップ関数の場合から考えてみよう。次のようなベクトル最大化問題（vectorvalued optimization problem）に当面している状況を想定することにする。

$$
\begin{array}{ll}
\max & f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \\
\max & f_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} \\
\vdots & \qquad\vdots \\
\max & f_m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_m\boldsymbol{x} \\
\text{s. t.} & \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{4}
$$

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_p)$, $\boldsymbol{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$ $(i = 1,2,\cdots,m)$, $\boldsymbol{A} = (a_{kl})_{p\times n}$ とする。

ベクトル最大化問題をファジィ線形計画モデルに変換するためには，各目的関数に意思決定者が主観的に希求水準 $F_i(i = 1,2,\cdots,m)$ を割り当てておく必要がある。この希求水準は境界に幅があり，$f_i(\boldsymbol{x}) \gtrsim F_i$ は「F_i に満たないのは余り望ましくない」というファジィ目標を表わしている。ファジィ目標を組込み，ファジィ線形計画モデルの形に変えると，以下のようになる。

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \gtrsim F_1 \\
\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} \gtrsim F_2 \\
\quad\vdots \\
\boldsymbol{c}_m\boldsymbol{x} \gtrsim F_m \\
\boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{cases}
\tag{5}
$$

i 番目のファジィ目標を特性づけるメンバーシップ関数 $\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))$ が以下のように表わされるとする。

$$
\begin{bmatrix}
\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) = 1 & F_i \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \\
0 \leqq \mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) \leqq 1 & F_i - \Delta_i \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \leqq F_i \\
\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) = 0 & f_i(\boldsymbol{x}) \leqq F_i - \Delta_i
\end{bmatrix}
\tag{6}
$$

ここに，Δ_i は正数で，i 番目の目的関数値 $f_i(\boldsymbol{x})$ が F_i 以上になれば意思決定者にとって完全に満足でき，$F_i - \Delta_i$ 以下であれば完全に不満足となることが示されている。メンバーシップ関数 $\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))$ が連続する区分線形関数であると仮定するならば，$F_i - \Delta_i \leqq f_i(x) \leqq F_i$ の区間で $\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) = 1 + (f_i(\boldsymbol{x}) - F_i) / \Delta_i$ と表わすことができる。簡単化のために，$f_i'(\boldsymbol{x}) = f_i(\boldsymbol{x}) / \Delta_i$，$F_i' = F_i / \Delta_i$ とおくと，メンバーシップ関数 $\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))$ は次のように書ける。

$$
\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) =
\begin{bmatrix}
1 & 0 \leqq f_i'(\boldsymbol{x}) - F_i' \\
f_i'(\boldsymbol{x}) - F_i' + 1 & -1 \leqq f_i'(\boldsymbol{x}) - F_i' \leqq 0 \\
0 & f_i'(\boldsymbol{x}) - F_i' \leqq -1
\end{bmatrix}
\tag{7}
$$

最小オペレータによる統合関数として，ファジィ共通集合 D のメンバーシップ関数 $\mu_D(\boldsymbol{x})$ 求め，最適代替案 $\boldsymbol{x}^*$ を選択する最大化決定を行なう。

$$
\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \max_{x\in X} \min_{1\leqq i\leqq n} [\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))] \tag{8}
$$

上式を解いて求められる最適解 $\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^*$ は，次式の最適解と同値であり[6]，したがって，通常の線形計画モデルに変換できたことが示されたことになる。

$$
\begin{array}{ll}
\max & \lambda \\
\text{s. t.} & f_i'(\boldsymbol{x}) - F_i' + 1 \geqq \lambda \\
 & \qquad\qquad \text{for } i = 1, 2, \cdots, m \\
 & \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{9}
$$

Ⅲ　無理関数型メンバーシップ関数を伴うファジィ線形計画モデル

Leberling は，「メンバーシップ関数の満足度の増加率は，線形メンバーシップ関数のように常に一定である必要はない。」[7] と考え，非線形メンバーシップ関数が実際に起こりうることが Hersh＝Caramazza によって経験的に示された[8] ことに依拠しつつ，正接双曲線メンバーシップ関数を提示し，最小オペレータと最大化決定を用いて通常の線形計画モデルに変換する解法を示している。また，非線形関数として指数型メンバーシップ関数を用い，通常の線形計画法に変換してパレート最適な解を求める解法も提案されている[9]。

本論では，非線形メンバーシップ関数として無理関数の適用による解法を試みることにしよう。いま，全体集合 $X = \{x\}$ を利用可能な代替案の集合とし，ファジィ目標は次のような無理関数で表わされるメンバーシップ関数によって特性づけられる場合を考察することにする。

$$
\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) =
\begin{bmatrix}
1 & F_i \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \\
\sqrt{\dfrac{\alpha_i f_i(\boldsymbol{x}) - \beta_i}{\alpha_i F_i - \beta_i}} & \dfrac{\beta_i}{\alpha_i} \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \leqq F_i \\
0 & f_i(\boldsymbol{x}) \leqq \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}
\end{bmatrix}
\tag{10}
$$

ここで，パラメータ $\alpha_i(>0)$, $\beta_i(>0)$, $F_i(>0)$, によって，i 番目の目的関数値 $f_i(\boldsymbol{x})$ が F_i 以上になれば意思決定者にとって完全に満足でき，$\dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ 以下

であれば完全に不満足となることが，示されている。下図のように，$\frac{\beta_i}{\alpha_i} \leqq f_i(\boldsymbol{x}) \leqq F_i$ の区間でメンバーシップ関数は $\mu_i(f_i(\boldsymbol{x})) = \sqrt{\frac{\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\beta_i}{\alpha_i F_i-\beta_i}}$ で表わされる曲線になり，満足度は0と1の間にある。

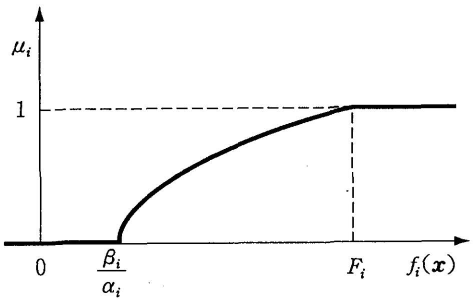

図1　無理関数型メンバーシップ関数

前節と全く同じベクトル最大化問題に当面している状況を想定することにする。また，これをファジィ線形計画モデルに変換するために，各目的関数に関しての意思決定者の主観的な希求水準 $F_i(i=1,2,\cdots,m)$ も前節と同様であるとする。ファジィ目標を組込み，ファジィ線形計画モデルの形に変えると，以下のようになる。

$$\begin{cases} c_1\boldsymbol{x} \gtrsim F_1 \\ c_2\boldsymbol{x} \gtrsim F_2 \\ \quad\vdots \\ c_m\boldsymbol{x} \gtrsim F_m \\ \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{11}$$

最小オペレータによってファジィ共通集合を求め，最適代替案 $\boldsymbol{x}^*$ を選択する最大化決定を行なうと，次式のようになる。

$$\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \max_{x\in X} \min_{1\leqq i\leqq n} [\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))] \tag{12}$$

上式を解いて求められる最適解 $\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^*$ は，次式の最適解と同値となる。

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &\text{s. t.}\ \sqrt{\frac{\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\beta_i}{\alpha_i F_i-\beta_i}} \geqq \lambda \\ &\qquad\qquad \text{for } i=1,2,\cdots,m \\ &\quad \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{13}$$

このモデルの非線形制約式の両辺を2乗すると，

$$\frac{\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\beta_i}{\alpha_i F_i-\beta_i} \geqq \lambda^2 \tag{14}$$

となり，さらに変形すると，

$$\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\lambda^2(\alpha_i F_i-\beta_i) \geqq \beta_i \tag{15}$$

$\lambda^2=\eta$ とおく[10]と，

$$\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\eta\,(\alpha_i F_i-\beta_i) \geqq \beta_i \tag{16}$$

λ は η に関して強意単調増加関数であるので，η を最大化することと λ を最大化することとは同値である。したがって，モデルは以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &\text{s. t.}\ \alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\eta(\alpha_i F_i-\beta_i) \geqq \beta_i \\ &\qquad\qquad \text{for } i=1,2,\cdots,m \\ &\quad \boldsymbol{Ax} \leqq \boldsymbol{b} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{17}$$

故に，無理関数型メンバーシップ関数を伴うファジィ線形計画モデルは通常の線形計画モデルに変換できたことが示された。このモデルで導かれる最適な妥協解はパレート最適を充足している[11]。

以上，無理関数型メンバーシップ関数を伴うファジィ線形計画モデルの解法について検討してきたが，非線形メンバーシップ関数として多様な形態の適用を拡大していくことは，現実性という視点からはなお重要であろう。ただ，現在までのところ，提唱されている解法を用いる限りでは，線形，区分線形メンバーシップ関数[12]も含めて異なる関数形の混合する線形計画モデルの解法は見出されてはいないという限界は，指摘しておかなければならない。

ファジィ線形計画モデルの解法の利点の一つは，ファジィ目標間，ファジィ制約間，あるいはファジィ目標・ファジィ制約間で相互を統合するファジィ決定を採用できる点にある。この点からは，目的と制約の間に数学的な処理上の差が無いと言える。しかし，多目的線形計画モデルは，ファジィ目標を目的関数に与えることによってファジィ線形計画モデルに変換され，最適な妥協解を導くことができるという点からは，ファジィ線形計画モデルの成立にとって必要条件はファジィ目標の設定である。モデルを簡素化するため，本稿では制約式に関してはファジィ性を伴わないファジィ線形計画モデルを扱ってきた。次節では，こうしたファジィ線形計画モデルについて，シンプレックス・アルゴリズムと

の関連において非線形メンバーシップ関数の適用を考察する。

IV 無理関数型メンバーシップ関数とアルゴリズム

1. シンプレックス・アルゴリズム

ファジィ線形計画モデルに具体的な数値を与えて作成された次式を用い，シンプレックス法にて解を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_1(\boldsymbol{x}) = x_1+x_2 \\
\max \quad & f_2(\boldsymbol{x}) = x_1+2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1+2x_2 \leqq 4 \\
& x_1+4x_2 \leqq 14 \\
& 5x_1+7x_2 \leqq 35 \\
& 5x_1+2x_2 \leqq 30 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

第1及び第2目的関数に関して意思決定者が目標とする希求水準は，それぞれ $4\frac{1}{2}$，9であるとすると，ファジィ不等式を用いて，以下のように表わされる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
& x_1+x_2 \gtrsim 4\frac{1}{2} \\
& x_1+2x_2 \gtrsim 9 \\
& -x_1+2x_2 \leqq 4 \\
& x_1+4x_2 \leqq 14 \\
& 5x_1+7x_2 \leqq 35 \\
& 5x_1+2x_2 \leqq 30 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\right.
\tag{19}
$$

(10) 式において $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$，$\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, F_1 = 4\frac{1}{2}, F_2 = 9$ とし，第1及び第2目的関数がそれぞれ次のような無理関数で表わされるメンバーシップ関数によって特性づけられる場合を考える。ただし，$f_1(\boldsymbol{x}) = x_1+x_2$，$f_2(\boldsymbol{x}) = x_1+2x_2$ である。

$$
\begin{aligned}
\mu_1(f_1(\boldsymbol{x})) &= \begin{cases} 1 & 4\frac{1}{2} \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{f_1(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \leqq 4\frac{1}{2} \\ 0 & f_1(\boldsymbol{x}) \leqq \frac{1}{2} \end{cases} \\
\mu_2(f_2(\boldsymbol{x})) &= \begin{cases} 1 & 9 \leqq f_2(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{3}\sqrt{f_2(\boldsymbol{x})} & 0 \leqq f_2(\boldsymbol{x}) \leqq 9 \\ 0 & f_2(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

(19)式を解いて求められる最適解 $\mu_i(\boldsymbol{x}^*) = \lambda^*$ は，次式の最適解と同値となる。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \lambda \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}\sqrt{f_1(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2}} \geqq \lambda \\
& \frac{1}{3}\sqrt{f_2(\boldsymbol{x})} \geqq \lambda \\
& -x_1+2x_2 \leqq 4 \\
& x_1+4x_2 \leqq 14 \\
& 5x_1+7x_2 \leqq 35 \\
& 5x_1+2x_2 \leqq 30 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

既に述べたように無理関数型メンバーシップ関数によって特性づけられるファジィ線形計画モデルは，通常の線形計画法に帰着するので，$\lambda^2 = \eta$ とおくと，最終的に仮設例は以下のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \eta \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+2x_2-8\eta \geqq 1 \\
& 2x_1+2x_2-18\eta \geqq 0 \\
& -x_1+2x_2 \leqq 4 \\
& x_1+4x_2 \leqq 14 \\
& 5x_1+7x_2 \leqq 35 \\
& 5x_1+2x_2 \leqq 30 \\
& x_1, x_2 \geqq 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$y = \eta$，スラック変数を x_3, x_4, x_5, x_6 とおき，初期シンプレックス表を作成する。非基底変数欄に負数が無くなるまでピボット操作を繰返すと，表1の最終シンプレックス表が得られる。

表1 最終シンプレックス表

y	η	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	0	0	0	$\frac{1}{11}$	0	0	0	$\frac{6}{11}$	y
	1			$\frac{1}{11}$				$\frac{6}{11}$	η
		1		$-\frac{1}{11}$				$\frac{5}{11}$	x_1
			1	$\frac{5}{11}$				$\frac{49}{22}$	x_2
				$-\frac{9}{11}$	1			$\frac{51}{11}$	x_4
				$-\frac{30}{11}$		1		$\frac{377}{22}$	x_5
				$-\frac{5}{11}$			1	$\frac{256}{11}$	x_6

最終シンプレックス表より，最適解は，$x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$，$\eta^* = \frac{6}{11}$ となることが分か

る。このとき，メンバーシップ関数の値は，$\mu_1(x_1^*, x_2^*) = \mu_2(x_1^*, x_2^*) = \lambda^* = \sqrt{\eta^*} = \sqrt{\frac{6}{11}}$ である。ここで求められた最適解 $x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$ は，無理関数型メンバーシップ関数によって特性づけられるファジィ線形計画モデルの解であると同時に，次式で表わされる線形メンバーシップ関数によって特性づけられるファジィ線形計画モデルの解でもある。ただし，$f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$，$f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2$ である。

$$\mu_1(f_1(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1 & 4\frac{1}{2} \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{4}\left(f_1(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \leqq 4\frac{1}{2} \\ 0 & f_1(\boldsymbol{x}) \leqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mu_2(f_2(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1 & 9 \leqq f_2(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{9} f_2(\boldsymbol{x}) & 0 \leqq f_2(\boldsymbol{x}) \leqq 9 \\ 0 & f_2(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \end{cases} \tag{23}$$

$\lambda^2 = \eta$ とおいて通常の線形計画法に変換したことは，メンバーシップ関数を非線形から線形に変形したことを意味している。このように，メンバーシップ関数を無理関数から一次式に変えても，モデルの同値性は損なわれていず，いずれにおいても最適解 $x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$ となり同一であることは，言うまでもない。ただ，$\lambda^2 = \eta$ とおくことによって，メンバーシップ関数の値が $\lambda^* = \sqrt{\frac{6}{11}}$ から $\eta^* = \frac{6}{11}$ へと変化していることは，認識しておく必要がある。

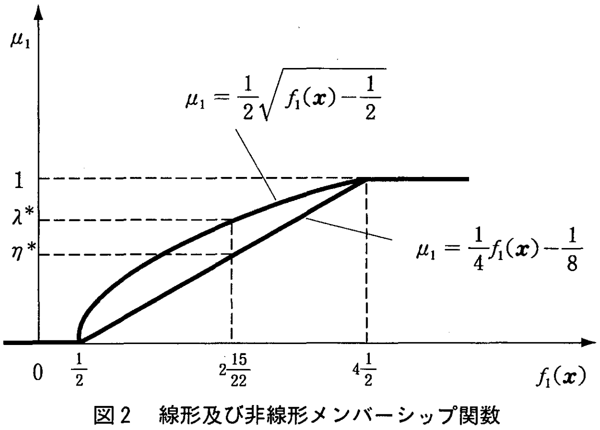

図2　線形及び非線形メンバーシップ関数

これを図2によって確認しておこう。$\frac{1}{2} \leqq f_1(\boldsymbol{x}) \leqq 4\frac{1}{2}$ における無理関数型メンバーシップ関数 $\mu_1(f_1(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2}\sqrt{f_1(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}}$ の場合について示すと，$\lambda^2 = \eta$ と置き換えることによってメンバーシップ関数の形態は $\mu_1(f_1(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{4}\left(f_1(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\right)$ に移行する。最適解 $x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$ のとき，$f_1(x^*) = x_1^* + x_2^* = 2\frac{15}{22}$ となる。このとき，メンバーシップ 関数の値は，それぞれ $\lambda^* = \sqrt{\frac{6}{11}}$，$\eta^* = \frac{6}{11}$ を取り，無理関数型メンバーシップ関数の方が線形メンバーシップ関数の場合より $\lambda^* - \eta^* = \sqrt{\frac{6}{11}} - \frac{6}{11} = \frac{\sqrt{66} - 6}{11}$ だけ大きい。$\mu_2(f_2(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{3}\sqrt{f_2(\boldsymbol{x})}$ の場合も同様に考えることができる。

通常の線形計画法に変換するために，技術上はメンバーシップ関数を非線形から線形に変形するという等価の数式操作を行ったが，最終的に必要な解は $x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$，$\lambda^* = \sqrt{\frac{6}{11}}$ であって，$\eta^* = \frac{6}{11}$ は除外されている。これは，$x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$ が，意思決定者にとって $\lambda^* = \sqrt{\frac{6}{11}}$ の満足の程度を持ちうる妥協として最良の解であるということである。$\sqrt{\frac{6}{11}}$ の満足度を持ちうるであろう可能性は，完全な満足には達してはいないものの，$\frac{6}{11}$ のそれより大きく，妥協の実行可能性が相対的に大きいことを示していると見られる。

$x_1^* = \frac{5}{11}$，$x_2^* = 2\frac{5}{22}$ に加えて，λ の値が与える追加情報の価値をどう評価するかということは，そのままファジィ線形計画法の選択原理としての有効性の評価にも重なっている。MOLP 問題を扱う代表的な手法として，目標計画法[13]，重みづけ法 (weighting method)，ε-制約法 (ε-constraint method)[14]，あるいは支払行列 (payoff matrix) を用いる方法[15]などがあるが，いずれの解法においても，そこで扱われる目標の加重 (weighting) や付順 (ordering) などの過程は，計算構造上は重

要な役割を担っているが，計算の途上で現われる加重値や付順値は経過的な数値と位置づけられ，追加的情報として最終的に残されるものではない。この点は，他の解法に比してファジィ線形計画法のλの値の著しい特徴である。また，最良の妥協点を探るために，その選択を意思決定者の主観に委ねるということでは他の解法に変わるところはないのであるが，意思決定者の主観をメンバーシップ関数を用いて明示する表現性においても際立っている。

主観を厳密に客観化することは，時に容易に実行しにくいこともある。メンバーシップ関数に主観が適切に反映されていないときは，導出された最適解に納得がいかないこともある。このような場合は，最適解は棄却され，メンバーシップ関数を修正し，演算を振出しに戻して新しい最適解を求めなければならない。意思決定者の許容できる最適解が得られるまで，この手続きは繰返される。

この反復手続きにとって，パラメトリック分析が有効である。この点については次節で触れることにしたい。

2. パラメトリック分析と追加的情報

無理関数型メンバーシップ関数にパラメータh_i $(i=1,2,\cdots,m)$,を追加し，その変動による最適解の変化を検討しよう。メンバーシップ関数を以下のように定式化する。

$$\mu_1(f_1(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1 & \dfrac{F_i+h_i}{\alpha_i}\leqq f_1(\boldsymbol{x}) \\ \sqrt{\dfrac{\alpha_i f_i(\boldsymbol{x})-\beta_i-h_i}{\alpha_i F_i-\beta_i}} & \dfrac{\beta_i+h_i}{\alpha_i}\leqq f_1(\boldsymbol{x})\leqq\dfrac{F_i+h_i}{\alpha_i} \\ 0 & f_1(\boldsymbol{x})\leqq\dfrac{\beta_i+h_i}{\alpha_i}\end{cases} \tag{24}$$

(24)式において$\alpha_1=\alpha_2=2,\beta_1=1,\beta_2=0,F_1=4\frac{1}{2}$，$F_2=9$とすると，メンバーシップ関数は次のように表わされる。ただし，$f_1(\boldsymbol{x})=x_1+x_2$, $f_2(\boldsymbol{x})=x_1+2x_2$である。

$$\mu_1(f_1(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1 & 4\frac{1}{2}+\frac{h_1}{2}\leqq f_1(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{f_1(\boldsymbol{x})-\frac{1}{2}-\frac{h_1}{2}} & \frac{1}{2}+\frac{h_1}{2}\leqq f_1(\boldsymbol{x})\leqq 4\frac{1}{2}+\frac{h_1}{2} \\ 0 & f_1(\boldsymbol{x})\leqq\frac{1}{2}+\frac{h_1}{2}\end{cases}$$

$$\mu_2(f_2(\boldsymbol{x}))=\begin{cases}1 & 9+\frac{h_2}{2}\leqq f_2(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{3}\sqrt{f_2(\boldsymbol{x})-\frac{h_2}{2}} & \frac{h_2}{2}\leqq f_2(\boldsymbol{x})\leqq 9+\frac{h_2}{2} \\ 0 & f_2(\boldsymbol{x})\leqq\frac{h_2}{2}\end{cases} \tag{25}$$

前節と同様に，ファジィ線形計画モデルに具体的な数値を与えて作成された（19）式を用い，$\lambda^2=\eta$とおいて通常の線形計画法に変換した上で，同じくシンプレックス法にて解いてみよう。

$y=\eta$，スラック変数をx_3, x_4, x_5, x_6とおいてシンプレックス表を作成すると，表2のようになる。

表2　初期シンプレックス表

y	η	x_1	x_2	h_1	h_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y
	$\boxed{8}$	−2	−2	1						−1	h_1
	18	−2	−4		1					0	h_2
		−1	2			1				4	x_3
		1	4				1			14	x_4
		5	7					1		35	x_5
		5	2						1	30	x_6

ピボット操作を行い基底変数を$h_1\rightarrow\eta$のように入れ替え，さらに$h_2\rightarrow x_1$，さらに$x_3\rightarrow x_2$のように基底変数の入れ替えを繰返すと，第4シンプレックス表を得る。この表から，$h_1=h_2=0$のとき，$x_1=\frac{5}{11}$，$x_2=2\frac{5}{22}$，$\eta=\frac{6}{11}$となり，故に，$\lambda=\sqrt{\frac{6}{11}}$であることが分かる。当然この解は，表1で得られた最適解と同一である。

続けてピボット操作を行い，基底変数を$x_4\rightarrow h_1$のように入れ替えると，シンプレックス表では$h_1=1\frac{8}{9}$，$h_2=0$のとき，$x_1=2, x_2=3, x_3=0$, $x_4=0$，$x_5=4$，$x_6=14$，$\eta=\frac{8}{9}$となる。故に，$\lambda=\frac{2}{3}\sqrt{2}$である。

さらに，基底変数を$x_5\rightarrow x_3$のように入れ替えると，非基底変数欄に負数が無くなり，表3の最終シンプレックス表が得られる。この最終表より最適解

が得られ，$h_1^* = \frac{373}{117}$，$h_2^* = 0$ のとき，$x_1^* = 3\frac{3}{13}$，$x_2^* = 2\frac{9}{13}$，$x_3^* = 1\frac{11}{13}$，$x_4^* = 0$，$x_5^* = 0$，$x_6^* = 8\frac{6}{13}$，$\eta^* = \frac{112}{117}$ となる。故に，このとき λ は極大化され $\lambda^* = \sqrt{\frac{112}{117}}$ となる。

表3　最終シンプレックス表

y	η	x_1	x_2	h_1	h_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{117}$	0	$\frac{112}{117}$	y
	1				$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{117}$		$\frac{112}{117}$	η
		1					$-\frac{7}{13}$	$\frac{4}{13}$		$\frac{42}{13}$	x_1
			1				$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{13}$		$\frac{35}{13}$	x_2
				1	$-\frac{4}{9}$		$-\frac{20}{39}$	$\frac{38}{117}$		$\frac{373}{117}$	h_1
						1	$-\frac{17}{13}$	$\frac{6}{13}$		$\frac{24}{13}$	x_3
							$\frac{25}{13}$	$-\frac{18}{13}$	1	$\frac{110}{13}$	x_6

以上の分析で分かるように，パラメータを $h_2 = 0$ に固定し h_1 の値を連続的に変動させることによって，$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$，$\eta$，$\lambda$ は変化する。導出された最適解に納得がいかない場合は，メンバーシップ関数のパラメータをこのように修正し，意思決定者の受容できる最適解が得られるまで，シンプレックス表によって演算を繰返すことができる。

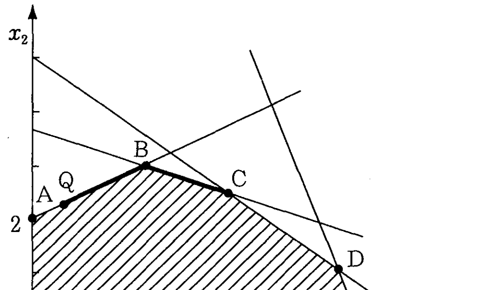

図3　解の軌跡

以上のパラメトリック分析を図形上で跡づけてみよう。(22) 式の全ての制約式を満たす実行可能解の点の集合は，凸集合ＯＡＢＣＤＥで表わされる。線形計画問題のパレート最適解は凸集合の端点で達成されることは既に明らかであるので，シンプレックス法では実行可能領域の端点を辿りながら，これ以上パレート改善の不可能な端点を見出すという方法を取っている。

端点である原点Ｏを起点として，稜線ＯＡに沿って移動する過程は，初期及び第２シンプレックス表で表わされる$(x_1, x_2) = (0, 0)$から出発し，第３シンプレックス表上で $x_2 = 0$ に固定したまま，x_1 を増加させることである。次の端点Ａに乗り移り，稜線ＡＢ上を移動する過程は，第４シンプレックス表上で $x_3 \to x_2$ のように基底変換を行い，h_1，$h_2 = 0$ に固定したまま，点Ｑ $(x_1, x_2) = (\frac{5}{11}, 2\frac{5}{22})$ に至るまで x_1, x_2 を増加させことに対応する。点Ｑは表２で表される最適解でもあることは，既に述べた通りである。点Ｑを越えて稜線ＡＢ上を動き，次の端点Ｂに乗り移る過程は，第５シンプレックス表上で $x_4 \to h_1$ のように基底変換を行い，$h_2 = 0$ に固定したまま，点Ｂ $(x_1, x_2) = (2, 3)$ に至るまで x_1，x_2，h_1 を増加させることに等しい。

さらに，稜線ＢＣに沿って移動し次の端点Ｃに乗り移る過程は，最終シンプレックス表上で $x_5 \to x_3$ のように基底変換を行い，$h_2 = 0$ に固定したまま，点Ｃ $(x_1, x_2) = (3\frac{3}{13}, \frac{35}{13})$ に至るまで x_1，x_2，h_1 を変化させることに等しい。したがって，パラメータ h_i を連続的に変動させると，解 (x_1, x_2) は稜線ＱＢＣの上を移動することが理解できる。

ここでは，h_i に数値を入れて新しいメンバーシップ関数を設定し，シンプレックス法で解を求める方法を述べたが，他のパラメータの値を変化させる場合も同様の議論が成り立つ。重要なのは，実感を忠実に反映するメンバーシップ関数の設定である。この文脈からは，非線形メンバーシップ関数の適用も意味をもつ。本論では，無理関数型メンバーシップ関数の適用を試みたが，他の類型の非線形関数へ適用を拡大していくことは，ファジィ線形計画法の意思決定支援への有用性を高めることになるであろう。

しかしながら，現在提示されている非線形メンバーシップ関数は，いずれも通常の線形計画法に変換されうる種類のものに限定されるという解法技巧上の制約に縛られている。この点では，非線形メンバーシップ関数適用の射程は限られていると言わざるをえない。

繰返すと，非線形メンバーシップ関数基底的なフィジィ線形計画モデルを通常の線形計画法に変換して解を求めることは，非線形メンバーシップ関数を線形メンバーシップ関数に変換して解を求めることと等価である。よって，最適解は同一である。しかし，そのときのメンバーシップ関数値に関しては，非線形関数と線形関数とで異なる。最終的に採用される追加的情報は，非線形メンバーシップ関数値であって，線形メンバーシップ関数値ではない。この情報は，意思決定者にとって選択される代替案がどの程度の満足度をもって受容されるかということを示し，選択される代替案やシステムの安定性を意味するとも解することができる[16]。これは，他のMOLP法の解法においては入手不可能な情報である。それ故に，ここでもたらされる追加的情報の有用性をどう評価するか，あるいは，その意味をどう解釈するかということは，ファジィ線形計画法の解法としての評価に重なるものであるし，さらには，ファジィ線形計画法への非線形メンバーシップ関数適用の評価にもつながってくるものであろう。

おわりに

MOLPの解法として，ファジィ線形計画法を用いるためには，全ての目的関数の右辺にファジィ目標を設定する必要があることを論じてきた。厳格に目標値を定めるのではなく，「およそ」などを冠して目標値に幅を持たせ，目標の達成の度合に応じた満足度を表わすメンバーシップ関数を導入することが必要であるということである。

一般的には，目標値のみならず，制約条件についてもファジィ制約を設けることが現実に即している場合もある。さらに，制約式の係数がファジィである場合も実際にはありうることであるし，言語表現が固有に持つ曖昧さを数式表現に置換えるときに，ファジィ数を使わざるざをえない場合もあるであろう。モデル化する際に，どの範囲までファジィ数を用いるかによって，多様なファジィ線形計画モデルを構築することができる。そして，そうした多様なファジィ線形計画モデルは，そのモデルに含まれる複数のファジィ数を同数のメンバーシップ関数の導入によって同時に処理し，最適解を求めることができるという優れた操作性を持っている。この操作の簡便性と同時に，現実に即応させながらファジィ数の取込みの範囲を広げることができる点において，現実への即応性にもメリットを認めることができる。

ファジィ線形計画モデルは，曖昧さを伴う係数や定数項を用いる範囲を変化させることで，種々の形に展開することはできるが，いずれのモデルにおいても，多目的線形計画法の解法として用いられるためには，メンバーシップ関数の導入によって複数の目標水準間の最良の妥協解が決定されるように，ファジィ目標が設定されていることが前提である。議論を簡明にするため，本論のモデルでは目標のみにファジィネスを組込み，制約条件や係数など他の箇所ではファジィネスを考慮しなかった。

MOLP問題の中心課題は，複数の目標間に最良の妥協解を見出すために，目標の加重や付順を決定する手法を考察することにあると考える。意思決定者の主観を定量的に関数関係に表し，これに依拠しながら条件付極大化問題を解き，その結果として目標の重みづけも決定される仕組みは，MOLP問題の他の解法における重みづけ決定過程と比べても，著しく特徴的である。他の解法では，加重や付順の設定の手続きの中に埋没していた意思決定者の主観が，この解法ではメンバーシップ関数という形で前面に押出され，可視的に認識されるようになっている。

目標の重みづけ決定構造の中心にあるメンバーシップ関数は，曖昧さを含む概念を特性づける関数であるが，希求目標水準からの乖離をどこまで許容し，どの程度の満足を得ることができるかという主観を表現する性格をも備えている。さらに，メンバーシップ関数を可能性分布として捉える見方もある。ファジィ概念を規定するメンバーシップ関数に対する解釈の広がりは，満足度基準に従って多目標間の調整を行なうに際しての選択原理として，ファジィ決定や最大化決定を用いることに説得力を与えているように考えられる。

そして，こうした特徴ある重みづけの決定構造を持つが故に，多目的線形計画法の他の解法には見られない情報，つまり，妥協解を巡る意思決定者の主観についての追加的な情報を明示的に提供できることについても論じてきた。

本論で論じた無理関数型メンバーシップ関数も含めて，現在提示されている非線形メンバーシップ関数は，いずれも通常の線形計画法に変換されうる種類のものに限定されるという技術上の制約が存在し，非線形メンバーシップ関数適用の射程は限られ

ている。むしろ，そうした技術的制約が，非線形メンバーシップ関数の提供する追加的情報の意味について，見過ごすことのできない示唆を投げかけていることを指摘したが，非線形メンバーシップ関数適用の射程を今後さらに見極めていくためには，意思決定主体のタイプや立場，意思決定環境，あるいは，意思決定目的などの違いを考慮しつつ，それらに適合的な情報を生み出す非線形メンバーシップ関数の形態についても，考察を深めていくことが必要であろう。

注

1）Bellman＝Zadehの定義に従いファジィ共通集合を決定する方法を「最小オペレータ」とZimmermanは称している。（H. J. Zimmerman, "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1 (1978), pp. 45-55.）

2）Bellman＝Zadehは，ファジィ目標とファジィ制約を同時に満たす共通集合を決定することをファジィ決定として定義しているが，拙稿ではこの定義に基づき複数のファジィ目標の共通集合を決定する。また，彼らは，最小オペレータの他にファジィ決定として積ファジィ決定や凸ファジィ決定も定義している。（R. E. Bellman and L. A. Zadeh, "Decision Making in a Fuzzy Environment", *Management Sci.*, 17 (1970), pp. 141-153.）

3）R. E. Bellman and L. A. Zadeh, *op. cit.*, pp. 141-160.

4）経験的方法としてよく用いられるものに，AHP（Analytic Hierarchy Process），固有ベクトル法（Eigenvector Method），Pl測度などがある。

5）H. J. Zimmerman, *op.cit.*, pp. 45-55.

6）$0 \leqq \mu_D(\boldsymbol{x}) \leqq 1$であるから，$0 \leqq \lambda \leqq 1$となるが，(9)式ではこの制約式はredundantである。(13)，(21)式でも同様である。

7）H. Leberling, "On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems Using the Fuzzy Min-operator", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6 (1981), p. 112.

8）H. M. Hersh and A. Caramazza, "A Fuzzy Set Approach to Modifiers and Vagueness in Natural Language", *Journal of Experimental Psychology : General*, Vol. 105 No. 3 (1976), pp. 254-276.

9）瀬見博『目標計画法の研究』泉文堂，1989年，171-178頁。

10）$0 \leqq \lambda^2 \leqq 1$であるから，$0 \leqq \eta \leqq 1$となるが，(17)式ではこの制約式はredundantである。(22)式でも同様である。

11）これを確認してみよう。そのためには，無理関数型メンバーシップ関数を伴うファジィ線形計画モデルの一意の最適解がλ^*，$\boldsymbol{x}^*$である場合に，$\boldsymbol{x}^*$が通常の線形計画モデルの一意の最適解であることを示さなければならない。

$\boldsymbol{x}^*$が通常の線形計画モデルの一意の最適解ではないという仮定を置こう。そうすると，$f_i(\boldsymbol{x}^*) \geqq f_i(\boldsymbol{x}) \ \forall \boldsymbol{x}$は否定され，$f_i(\boldsymbol{x}^*) < f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) \ \exists \hat{\boldsymbol{x}}$となり実行可能解が存在しなければならない。ところで，$\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}))$は$f_i(\boldsymbol{x})$に関して強意単調増加関数であるので，$\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}^*)) < \mu_i(f_i(\hat{\boldsymbol{x}})) \ \exists \hat{\boldsymbol{x}}$となる。これより，$\sqrt{\eta^*} = \lambda^* = \max \min [\mu_i(f_i(\boldsymbol{x}^*)] < \max \min [\mu_i(f_i(\hat{\boldsymbol{x}})] = \hat{\lambda} = \sqrt{\hat{\eta}}$という結果が導き出される。これは，$\lambda^*$，$\boldsymbol{x}^*$がファジィ線形計画モデルの一意の最適解であるということに反する。したがって，$\boldsymbol{x}^*$が通常の線形計画モデルの一意の最適解ではないという仮定は誤りである。故に，$\boldsymbol{x}^*$は通常の線形計画モデルの最適解であるという帰結になる。

12）E. L. Hannan, "On the Efficiency of the Product Operator in Fuzzy Programming with Multiple Objectives", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2 (1979), pp. 259-262.

13）井尻雄士『計数管理の基礎』岩波書店，1970年，50-68頁。

14）重みづけ法については，次の文献のpp. 243-249を参照，ε-制約法については，同じくpp. 250-252を参照されたい。C. L. Hwang and A. S. M. Masud, *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag: New York, 1979.

15）S. M. Belenson and K. C. Kapur, "An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples", *Operational Research Quarterly*, Vol. 24 No. 1, pp. 65-77.

16）小野博則「予算管理システムの効率性評価とファジィ化――誘因におけるファジィネスに関する試論」,『経済学研究』(九州大学経済学部)，第65巻第5・6号 (1998)，13頁。