ファジィ集合演算の自然な拡張

下　田　　　守

序

通常のファジィ文献においては，ファジィ集合は所属関数と同一視され，ファジィ集合の間の包含関係や集合演算は同じ集合（全体集合と呼ばれる）の上の所属関数の間の順序関係や演算として定義されている．

拙稿 [7] では，直観主義的集合論の階層モデル V^H の元を一般のファジィ集合として，普通の（クリスプ）集合 X の V^H への埋め込みの V^H における部分集合を X 上のファジィ集合と定義した．そして，集合 X 上のファジィ集合と X 上の所属関数の間に順序（包含）関係および和集合・共通集合・差集合の集合演算を保つ自然な対応が存在することを示した．

このモデル V^H の中では任意の集合の間に包含関係や集合演算が考えられるから，異なる集合上のファジィ集合の間にも自然に順序や演算を考えることができる．本稿では，この自然な拡張を所属関数の間でも定義して，関連する性質について述べる．

まず初めの2節で [7] の結果について，若干の訂正と追加を加えつつ，概要を整理する．次いで第3節では，「写像の制限」の概念を用いて，定義域が異なる所属関数の間で順序関係や集合演算を定義して，集合の間の包含関係や集合演算に対応する自然な性質をもつことを示す．さらに，異なる集合上のファジィ部分集合と所属関数の間でも，自然な対応が順序と演算を保存することを明らかにする．

1　V^Hにおける集合

$H = \langle |H|; \wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee, \rightarrow, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \leq \rangle$ をある完備ハイティング代数，V を普通の集合全体のクラスとする．言語は，存在を表す1項述語記号 E を伴う直観主義的集合論の体系を考える．

定義 1.1　H を真理値集合とする直観主義的集合論の階層モデル V^H は，超限帰納法により次のように定義される．

$$V_0^H = \phi, \qquad V_\alpha^H = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^H \quad (\alpha\text{が極限順序数のとき}),$$

$$V_{\alpha+1}^H = \{\, u = \langle |u|, Eu\rangle \,;\ |u| : \mathcal{D}u \longrightarrow H,\ \mathcal{D}u \subseteq V_\alpha^H,$$
$$Eu \in H,\ |u|(x) \leq Eu \wedge Ex \ \ (\forall x \in \mathcal{D}u)\}.$$

$$V^H = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha^H.$$

以下，$|u|$ を u と略記する．

定義 1.2　V^H上の閉論理式に対する真理値を次のように定義する．まず，原始論理式の真理値を，同時帰納法により次の式で定義する．

$$\|Eu\| = Eu, \qquad \|u \in v\| = \bigvee_{y\in\mathcal{D}v} (v(y) \wedge \|u = y\|),$$

$$\|u = v\| = \bigwedge_{x\in\mathcal{D}u} (u(x) \rightarrow \|x \in v\|) \wedge \bigwedge_{y\in\mathcal{D}v} (v(y) \rightarrow \|y \in u\|) \wedge Eu \wedge Ev.$$

また，複合論理式の真理値を，次の各式によって帰納的に定義する．

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \wedge \|\psi\|, \qquad \|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \vee \|\psi\|,$$

$$\|\varphi \rightarrow \psi\| = \|\varphi\| \rightarrow \|\psi\|, \qquad \|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\|,$$

$$\|\forall x\varphi(x)\| = \bigwedge_{u\in V^H} (Eu \rightarrow \|\varphi(x)\|), \quad \|\exists x\varphi(x)\| = \bigvee_{u\in V^H} (Eu \wedge \|\varphi(x)\|).$$

定義 1.3　V^H上の関係 $u \sqsubseteq v, u \sim v, u \approx v$ を次のように定める.

(1) $\|u \subseteq v\| = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}u} (u(x) \to \|x \in v\|)$,

$u \sqsubseteq v \iff \|u \subseteq v\| = \mathbf{1}$.

(2) $u \sim v \iff u \sqsubseteq v$ かつ $v \sqsubseteq u$,

$u \approx v \iff u \sim v$ かつ $Eu = Ev$.

定義 1.4　各 $x \in V$ に対し，$\check{x} \in V^H$を次のように帰納的に定義する.

$$\mathcal{D}\check{x} = \{\check{y};\, y \in x\},\ \ E\check{x} = \mathbf{1},\ \ \check{x} : \check{y} \longmapsto \mathbf{1}.$$

この対応を V から V^Hへの標準的な埋め込みと呼ぶ．V の空集合 ϕ の埋め込み $\phi^{\vee} = \langle \phi, \mathbf{1} \rangle$ が V^Hにおける空集合となる．すなわち，任意の $u \in V^H$に対して，$\|u \in \phi^{\vee}\| = \mathbf{0}$ かつ $\|\phi^{\vee} \subseteq u\| = \mathbf{1}$ が成り立つ.

命題 1.1　任意の束縛された論理式 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ と $x_1, \cdots, x_n \in V$ に対して，次が成り立つ.

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \iff \|\varphi(\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n)\| = \mathbf{1},$$
$$\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \iff \|\varphi(\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n)\| = \mathbf{0}.$$

定義 1.5　$u, v \in V^H$に対して，$\{u, v\}^H, \langle u, v \rangle^H, u \overset{H}{\times} v \in V^H$ を，それぞれ次のように定義する.

(1) $\mathcal{D}\{u, v\}^H = \{u, v\},\ \ E\{u, v\}^H = Eu \wedge Ev$,

$\{u, v\}^H : x \longmapsto Eu \wedge Ev$.

(2) $\langle u, v \rangle^H = \{\{u, u\}^H, \{u, v\}^H\}^H$.

(3) $\mathcal{D}(u \overset{H}{\times} v) = \{\langle x, y \rangle^H; x \in \mathcal{D}u,\ y \in \mathcal{D}v\},\ \ E(u \overset{H}{\times} v) = Eu \wedge Ev$,

$u \overset{H}{\times} v : \langle x, y \rangle^H \longmapsto u(x) \wedge v(y)$.

補題 1.1　$x, y, u, v \in V^H$とする.

(1) $\|x \in \{u, v\}^H\| = (\|x = u\| \vee \|x = v\|) \wedge Eu \wedge Ev.$

(2) $\|\langle u, v\rangle^H = \langle x, y\rangle^H\| = \|u = x\| \wedge \|v = y\|.$

(3) $\|\langle x, y\rangle^H \in u \overset{H}{\times} v\| = \|x \in u\| \wedge \|y \in v\|.$

補題 1.2　([8] 命題 1.3)

任意の集合 $x, y, X, Y \in V$ に対して，次の各式が成り立つ.

(1) $\{\check{x}, \check{y}\}^H = \{x, y\}^\vee.$

(2) $\langle \check{x}, \check{y}\rangle^H = \langle x, y\rangle^\vee.$

(3) $\check{X} \overset{H}{\times} \check{Y} = (X \times Y)^\vee.$

命題 1.2　V^H は直観主義的集合論のモデルである．すなわち，直観主義的集合論の任意の公理 φ に対して，$\|\varphi\| = \mathbf{1}$ が成り立つ.

証明には，上記の空集合や対のほかに和集合・べき集合・無限集合の構成などが必要である（[10][11] 参照）.

次に基本的な集合演算である共通集合・和集合・差集合を定義する.

定義 1.6　$u, v \in V^H$に対して，$u \overset{H}{\cap} v$, $u \overset{H}{\cup} v$, $u \setminus^H v \in V^H$ を，それぞれ次のように定義する.

(1) $\mathcal{D}(u \overset{H}{\cap} v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v, \quad E(u \overset{H}{\cap} v) = Eu \wedge Ev,$

$u \overset{H}{\cap} v : x \longmapsto \|x \in u\| \wedge \|x \in v\|.$

(2) $\mathcal{D}(u \overset{H}{\cup} v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v, \quad E(u \overset{H}{\cup} v) = Eu \vee Ev,$

$u \overset{H}{\cup} v : x \longmapsto \|x \in u\| \vee \|x \in v\|.$

(3) $\mathcal{D}(u \setminus^H v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v, \quad E(u \setminus^H v) = Eu \vee Ev,$

$u \setminus^H v \ : x \longmapsto \|x \in u\| \wedge \neg\|x \in v\|.$

補題 1.3　$u, v, x \in V^H$とする.

(1)　$\|x \in u \overset{H}{\cap} v\| = \|x \in u\| \wedge \|x \in v\|$.

(2)　$\|x \in u \overset{H}{\cup} v\| = \|x \in u\| \vee \|x \in v\|$.

(3)　$\|x \in u \setminus^H v\| = \|x \in u\| \wedge \neg\|x \in v\|$.

命題 1.3　$u, v, z \in V^H$とする.

(1)　$u \overset{H}{\cap} v \sqsubseteq u$ かつ $u \overset{H}{\cap} v \sqsubseteq v$.

$z \sqsubseteq u$ かつ $z \sqsubseteq v$ ならば, $z \sqsubseteq u \overset{H}{\cap} v$.

(2)　$u \sqsubseteq u \overset{H}{\cup} v$ かつ $v \sqsubseteq u \overset{H}{\cup} v$.

$u \sqsubseteq z$ かつ $v \sqsubseteq z$ ならば, $u \overset{H}{\cup} v \subseteq z$.

(3)　$u \setminus^H v \sqsubseteq u$ かつ $(u \setminus^H v) \cap v \sim \phi^{\vee}$.

$z \sqsubseteq u$ かつ $z \cap v \sim \phi^{\vee}$ ならば, $z \sqsubseteq u \setminus^H v$.

補題 1.4　任意の集合 $X, Y \in V$ に対して, 次の各式が成り立つ.

(1)　$\check{X} \overset{H}{\cap} \check{Y} \approx (X \cap Y)^{\vee}$.

(2)　$\check{X} \overset{H}{\cup} \check{Y} = (X \cup Y)^{\vee}$.

(3)　$\check{X} \setminus^H \check{Y} \approx (X \setminus Y)^{\vee}$.

混乱の恐れがないときは, $\phi^{\vee}$を ϕ, $\{u, v\}^H$を $\{u, v\}$, $\langle u, v\rangle^H$を $\langle uv\rangle^H$ または $\langle uv\rangle$, $u \overset{H}{\cap} v$ を $u \cap v$ などと略記する.

2　同じ集合上のファジィ集合演算

以下，X を普通の集合，$A, B \in V^H$ とする．集合 X から H への写像を X 上の H 値写像と呼ぶ．

定義 2.1

(1)　V^H の元を H ファジィ集合という．$A \in V^H$ に対して，H 値写像

$$\mu : X \longrightarrow H;\ x \longmapsto \|\check{x} \in A\|$$

を，集合 X 上の A の所属関数といい，$\mu_A = \mu_A^X$ とかく．

(2)　V^H における $\check{X}$ の部分集合を X の H ファジィ部分集合という．すなわち，$A \in V^H$ に対して，

$$A \text{ が } X \text{ の } H \text{ ファジィ部分集合} \iff A \sqsubseteq \check{X}\ .$$

所属関数はメンバーシップ関数とも呼ばれる．X の H ファジィ部分集合 A を X の H ファジィ集合といい，A の X 上の所属関数を単に A の所属関数とも呼ぶ．

命題 2.1　([7] 定理 1)

集合 X 上の任意の H 値写像 μ は，適当な X の H ファジィ集合 A の X 上の所属関数となる．すなわち，$\mu : X \longrightarrow H$ ならば，$A \sqsubseteq \check{X}$ かつ $\mu = \mu_A^X$ をみたす $A \in V^H$ が存在する，

定義 2.2　$\mu, \nu : X \longrightarrow H$ に対し，関係 $\mu \leq \nu$ を次のように定める：

$$\mu \leq \nu \iff \mu(x) \leq \nu(x) \quad (\forall x \in X).$$

関係 $\leq$ は X 上の H 値写像全体の集合における順序関係である．

定義 2.3　$\mu, \nu : X \longrightarrow H$ に対し，$\mu \wedge \nu$, $\mu \vee \nu$, $\mu \setminus \nu$, $\neg\mu : X \longrightarrow H$ を次の各式により定義する．

$$\mu \wedge \nu : x \longmapsto \mu(x) \wedge \nu(x),$$

$$\mu \vee \nu : x \longmapsto \mu(x) \vee \nu(x),$$

$$\mu \setminus \nu : x \longmapsto \mu(x) \wedge \neg\nu(x),$$

$$\neg\, \mu : x \longmapsto \neg\, \mu(x).$$

X から H への写像全体の順序集合において，演算$\wedge, \vee, \setminus, \neg$は束の下限・上限・相対補元・補元を与える．したがって，X 上の H 値写像全体の集合は H から導入されたハイティング代数の構造をもつ．

定理 1　([7] 定理３)

A, B を集合 X の H ファジィ部分集合，μ_A，$\mu_B : X \longrightarrow H$ を X 上の A, B の所属関数とすると，次が成り立つ．

(1) $A \sqsubseteq B \iff \mu_A \leq \mu_B$.

(2) $A \sim B \iff \mu_A = \mu_B$.

定理 2　([7] 定理５)

$A, B \in V^H$とすると，A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\check{X} \setminus A$ の X 上の所属関数について，次の各式が成り立つ．

(1) $\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$.

(2) $\mu_{A \cup B} = \mu_A \vee \mu_B$.

(3) $\mu_{A \setminus B} = \mu_A \setminus \mu_B$.

(4) $\mu_{\check{X} \setminus A} = \neg\, \mu_A$.

上の２つの定理により，X の H ファジィ集合 A と X 上の H 値写像 μ_Aとの間の対応は，順序（包含関係）と基本的な集合演算を保存する自然な対応であることが分かる．

3　ファジィ集合演算の拡張

以下，X, Y, Z, W を普通の集合，$A, B \in V^H$ とする．

命題 3.1　X の H ファジィ部分集合 A と Y の H ファジィ部分集合 B に対して，$A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ は，それぞれ $X \cap Y, X \cup Y, X$ の H ファジィ部分集合になる．

証明.　補題 1.4 より，

$$
\begin{aligned}
&A \cap B \sqsubseteq \check{X} \cap \check{Y} \approx (X \cap Y)^{\vee}, \\
&A \cup B \sqsubseteq \check{X} \cup \check{Y} = (X \cup Y)^{\vee}, \\
&A \setminus B \sqsubseteq A \sqsubseteq \check{X}\ .
\end{aligned}
$$

□

定義 3.1　X 上の H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$ に対して，次のように定義される Y 上の H 値写像 $\mu{\restriction}Y : Y \longrightarrow H$ を μ の Y への制限という．

$$
\mu{\restriction}Y : y \longmapsto \begin{cases} \mu(y) & (y \in Y \cap X) \\ \mathbf{0} & (y \in Y \setminus X). \end{cases}
$$

$Y \subseteq X$ のときは，普通の写像の制限の定義と一致する．

補題 3.1　写像 $\mu : X \longrightarrow H$ と集合 Y, Z に対して，次が成り立つ．

(1)　$\mu{\restriction}X = \mu$.

(2)　$(\mu{\restriction}Y){\restriction}Z = \mu{\restriction}(Y \cap Z)$.

定義 3.2　2つの H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$ と $\nu : Y \longrightarrow H$ の間の関係 $\mu \preceq \nu$, $\mu \simeq \nu$ を，次のように定義する．

(1)　$\mu \preceq \nu \iff \mu \leq \nu{\restriction}X$.

(2)　$\mu \simeq \nu \iff \mu \preceq \nu$ かつ $\nu \preceq \mu$.

関係 $\preceq$ は同値関係 $\simeq$ と両立する擬順序関係である．$X = Y$ のとき，$\mu \preceq \nu$ は $\mu \leq \nu$ と，$\mu \simeq \nu$ は $\mu = \nu$ と，それぞれ一致する．

補題 3.2 $\mu : X \longrightarrow H,\ \nu : Y \longrightarrow H$ とすると，次が成り立つ．

(1) $$\mu \preceq \nu \iff \begin{cases} \mu(x) \leq \nu(x) & (x \in X \cap Y) \\ \mu(x) = \mathbf{0} & (x \in X \setminus Y). \end{cases}$$

(2) $$\mu \simeq \nu \iff \begin{cases} \mu(z) = \mathbf{0} & (z \in X \setminus Y) \\ \mu(z) = \nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \nu(z) = \mathbf{0} & (z \in Y \setminus X). \end{cases}$$

命題 3.2 $\mu : X \longrightarrow H,\ \nu : Y \longrightarrow H,\ X \cup Y \subseteq Z$ とする．

(1) $\mu \preceq \nu \iff \mu\restriction Z \leq \nu\restriction Z.$

(2) $\mu \simeq \nu \iff \mu\restriction Z = \nu\restriction Z.$

証明.

(1) 定義 3.1 より，任意の $z \in Z$ に対して，

$$(\mu\restriction Z)(z) = \begin{cases} \mu(z) & (z \in Z \cap X) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus X), \end{cases}$$

$$(\nu\restriction Z)(z) = \begin{cases} \nu(z) & (z \in Z \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus Y). \end{cases}$$

したがって，補題 3.2 (1) より，

$$\begin{aligned} \mu\restriction Z \leq \nu\restriction Z &\iff (\mu\restriction Z)(z) \leq (\nu\restriction Z)(z) \qquad (\forall z \in Z) \\ &\iff \begin{cases} \mu(x) \leq \nu(x) & (x \in X \cap Y) \\ \mu(x) = \mathbf{0} & (x \in X \setminus Y) \end{cases} \\ &\iff \mu \preceq \nu. \end{aligned}$$

(2) (1) より容易に導かれる． □

次に，異なる集合上の H 値写像の間の集合演算を定義する．

定義 3.3 H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$ と $\nu : Y \longrightarrow H$ に対し，$X \cup Y = Z$ 上の H 値写像 $\mu \wedge \nu$, $\mu \vee \nu$, $\mu \setminus \nu : Z \longrightarrow H$ を次の各式で定義する.

$$\mu \wedge \nu = (\mu \restriction Z) \wedge (\nu \restriction Z),$$
$$\mu \vee \nu = (\mu \restriction Z) \vee (\nu \restriction Z),$$
$$\mu \setminus \nu = (\mu \restriction Z) \setminus (\nu \restriction Z).$$

$X = Y$ のときは，定義 2.3 と一致する．集合 X と Y の対称差を $X \ominus Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ とかく.

補題 3.3 $\mu \wedge \nu$, $\mu \vee \nu$, $\mu \setminus \nu : X \cup Y \longrightarrow H$ の値は次のようになる.

(1) $\mu \wedge \nu : z \longmapsto \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in X \ominus Y). \end{cases}$

(2) $\mu \vee \nu : z \longmapsto \begin{cases} \mu(z) & (z \in X \setminus Y) \\ \mu(z) \vee \nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \nu(z) & (z \in Y \setminus X). \end{cases}$

(3) $\mu \setminus \nu : z \longmapsto \begin{cases} \mu(z) & (z \in X \setminus Y) \\ \mu(z) \wedge \neg\nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Y \setminus X). \end{cases}$

証明. $\mu : X \longrightarrow H$, $\nu : Y \longrightarrow H$, $X \cup Y = Z$ とする.

(1) 任意の $z \in Z$ に対して,

$$\begin{aligned}(\mu \wedge \nu)(z) &= ((\mu \restriction Z) \wedge (\nu \restriction Z))(z) = (\mu \restriction Z)(z) \wedge (\nu \restriction Z)(z) \\ &= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mu(z) \wedge \mathbf{0} & (z \in X \setminus Y) \\ \mathbf{0} \wedge \nu(z) & (z \in Y \setminus X) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in X \ominus Y). \end{cases}\end{aligned}$$

(2)(3) も同様に証明できる. □

命題 3.3　H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$, $\nu : Y \longrightarrow H$ と任意の集合 Z に対して，次の各式が成り立つ．

(1) $(\mu \wedge \nu) \restriction Z = (\mu \restriction Z) \wedge (\nu \restriction Z)$.

(2) $(\mu \vee \nu) \restriction Z = (\mu \restriction Z) \vee (\nu \restriction Z)$.

(3) $(\mu \setminus \nu) \restriction Z = (\mu \restriction Z) \setminus (\nu \restriction Z)$.

証明．　$X \cup Y = W$ とおく．

(1) 任意の $z \in Z$ に対して，

$$
\begin{aligned}
((\mu \wedge \nu) \restriction Z)(z) &= \begin{cases} (\mu \wedge \nu)(z) & (z \in Z \cap W) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus W) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in Z \cap X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \cap (X \ominus Y)) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus W) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in Z \cap X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus (X \cap Y)). \end{cases}
\end{aligned}
$$

他方，

$$
\begin{aligned}
(\mu \restriction Z)(z) \wedge (\nu \restriction Z)(z) &= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in Z \cap X \cap Y) \\ \mu(z) \wedge \mathbf{0} & (z \in X \setminus Y) \\ \mathbf{0} \wedge \nu(z) & (z \in Y \setminus X) \\ \mathbf{0} \wedge \mathbf{0} & (z \notin X \cup Y) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu(z) \wedge \nu(z) & (z \in Z \cap X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Z \setminus (X \cap Y)). \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって，

$$(\mu \wedge \nu) \restriction Z = (\mu \restriction Z) \wedge (\nu \restriction Z).$$

(2)(3) も (1) とまったく同様に証明できる．　□

命題 3.4　任意の H 値写像 μ, ν, λ について，次が成り立つ．

(1) $\mu \wedge \nu \preceq \mu$ かつ $\mu \wedge \nu \preceq \nu$.

$\lambda \preceq \mu$ かつ $\lambda \preceq \nu$ ならば，$\lambda \preceq \mu \wedge \nu$.

(2) $\mu \preceq \mu \vee \nu$ かつ $\nu \preceq \mu \vee \nu$.

$\mu \preceq \lambda$ かつ $\nu \preceq \lambda$ ならば，$\mu \vee \nu \preceq \lambda$.

(3) $\mu \setminus \nu \preceq \mu$ かつ $(\mu \setminus \nu) \wedge \nu \simeq \bar{\mathbf{0}}$.

$\lambda \preceq \mu$ かつ $\lambda \wedge \nu \simeq \bar{\mathbf{0}}$ ならば，$\lambda \preceq \mu \setminus \nu$.

ただし，$\bar{\mathbf{0}}$ は適当な集合上で常に値 $\mathbf{0}$ をとる定数写像とする．

証明.　$\mu : X \longrightarrow H$, $\nu : Y \longrightarrow H$, $\lambda : Z \longrightarrow H$, $X \cup Y \cup Z = W$ とする．$X = Y = Z$ の場合は，X 上の H 値写像の全体がハイティング代数となることから容易に証明できる．

一般の場合は，同じ W 上の H 値写像 $\mu \restriction W$, $\nu \restriction W$, $\lambda \restriction W$ について命題が成り立つことから，命題 3.2 と命題 3.3 を用いればよい．

例えば (3) については次のように証明する．まず，命題 3.3 (3) より，

$$(\mu \setminus \nu) \restriction W = (\mu \restriction W) \setminus (\nu \restriction W) \leq (\mu \restriction W)$$

だから，命題 3.2 (1) によって，$\mu \setminus \nu \preceq \mu$.

次に，命題 3.3 (1)(3) より，

$$((\mu \setminus \nu) \wedge \nu) \restriction W = ((\mu \restriction W) \setminus (\nu \restriction W)) \wedge (\nu \restriction W) = \bar{\mathbf{0}}$$

だから，命題 3.2 (2) によって，$(\mu \setminus \nu) \wedge \nu \simeq \bar{\mathbf{0}}$.

さらに，$\lambda \preceq \mu$ かつ　$\lambda \wedge \nu \simeq \bar{\mathbf{0}}$ ならば，命題 3.2 と命題 3.3 (1) より，

$$\lambda \restriction W \leq \mu \restriction W \text{ かつ } (\lambda \restriction W) \wedge (\nu \restriction W) = (\lambda \wedge \nu) \restriction W = \bar{\mathbf{0}}.$$

したがって，$\lambda \restriction W \leq \neg(\nu \restriction W)$ だから，命題 3.3 (3) より，

$$\lambda \restriction W \leq (\mu \restriction W) \wedge \neg(\nu \restriction W) = (\mu \restriction W) \setminus (\nu \restriction W) = (\mu \setminus \nu) \restriction W.$$

再び命題 3.2 (1) によって，$\lambda \preceq \mu \setminus \nu$.　□

定理 3　A, B をそれぞれ X, Y の H ファジィ集合，μ_A^X を A の X 上の所属関数，μ_B^Y を B の Y 上の所属関数とすると，次が成り立つ．

(1)　$A \sqsubseteq B \iff \mu_A^X \preceq \mu_B^Y$.

(2)　$A \sim B \iff \mu_A^X \simeq \mu_B^Y$.

証明．$A \sqsubseteq \check{X}$, $B \sqsubseteq \check{Y}$, $\mu = \mu_A^X$, $\nu = \mu_B^Y$ とする．
(1)　$B \sqsubseteq \check{Y}$より，$x \notin Y$ ならば $\| \check{x} \in B \| = \| \check{x} \in B \| \wedge \| \check{x} \in \check{Y} \| = \mathbf{0}$.
したがって，

$$\begin{aligned} A \sqsubseteq B &\iff \| \check{x} \in A \| \leq \| \check{x} \in B \| \qquad (\forall x \in X) \\ &\iff \begin{cases} \mu(x) \leq \nu(x) & (x \in X \cap Y) \\ \mu(x) = \mathbf{0} & (x \in X \setminus Y) \end{cases} \\ &\iff \mu \preceq \nu. \end{aligned}$$

(2)　(1) から直ちに導かれる．　□

補題 3.4　任意の $A \in V^H$ と $X \in V$ に対して，$B = A \cap \check{X}$ とすると，B は X の H ファジィ集合で，A と X 上の所属関数が一致する．

証明．　明らかに $B \sqsubseteq \check{X}$であり，任意の $x \in X$ に対して，

$$\mu_B^X(x) = \| \check{x} \in B \| = \| \check{x} \in A \cap \check{X} \| = \| \check{x} \in A \| = \mu_A^X(x). \qquad \square$$

定理 4　$A, B \in V^H$で，μ_A^X を A の X 上の所属関数，μ_B^Y は B の Y 上の所属関数とすると，次が成り立つ．

(1)　$A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{Y} \iff \mu_A^X \preceq \mu_B^Y$.

(2)　$A \cap \check{X} \sim B \cap \check{Y} \iff \mu_A^X \simeq \mu_B^Y$.

証明．　定理 3，補題 3.4 より明らか．　□

定理 5　A, B をそれぞれ X, Y の H ファジィ部分集合，A の X 上の所属関数を $\mu_A : X \longrightarrow H$，$B$ の Y 上の所属関数を $\mu_B : Y \longrightarrow H$ とする．$A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ の $X \cup Y$ 上の所属関数を，それぞれ $\mu_{A\cap B}, \mu_{A\cup B}, \mu_{A\setminus B} : X \cup Y \longrightarrow H$ とすると，次の各式が成り立つ．

(1)　$\mu_{A\cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$.

(2)　$\mu_{A\cup B} = \mu_A \vee \mu_B$.

(3)　$\mu_{A\setminus B} = \mu_A \setminus \mu_B$.

証明.　$A \sqsubseteq \check{X}$, $B \sqsubseteq \check{Y}$ だから，$z \notin X$ のとき $\|\check{z} \in A\| = \mathbf{0}$ となり，$z \notin Y$ ならば $\|\check{z} \in B\| = \mathbf{0}$ となる．以下，(2) と (3) の証明を示す．(1) は (2) とまったく同様にして証明できる．

(2)　任意の $z \in X \cup Y$ に対して，補題 3.3 (2) より，

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup B}(z) &= \|\check{z} \in A \cup B\| = \|\check{z} \in A\| \vee \|\check{z} \in B\| \\
&= \begin{cases} \|\check{z} \in A\| & (z \in X \setminus Y) \\ \|\check{z} \in A\| \vee \|\check{z} \in B\| & (z \in X \cap Y) \\ \|\check{z} \in B\| & (z \in Y \setminus X) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu_A(z) & (z \in X \setminus Y) \\ \mu_A(z) \vee \mu_B(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mu_B(z) & (z \in Y \setminus X) \end{cases} \\
&= (\mu_A \vee \mu_B)(z).
\end{aligned}$$

(3)　任意の $z \in X \cup Y$ に対して，補題 3.3 (3) より，

$$\begin{aligned}
\mu_{A\setminus B}(z) &= \|\check{z} \in A \setminus B\| = \|\check{z} \in A\| \wedge \neg\|\check{z} \in B\| \\
&= \begin{cases} \|\check{z} \in A\| & (z \in X \setminus Y) \\ \|\check{z} \in A\| \wedge \neg\|\check{z} \in B\| & (z \in X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Y \setminus X) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu_A(z) & (z \in X \setminus Y) \\ \mu_A(z) \wedge \neg\mu_B(z) & (z \in X \cap Y) \\ \mathbf{0} & (z \in Y \setminus X) \end{cases} \\
&= (\mu_A \setminus \mu_B)(z).
\end{aligned}$$

□

結

本稿では，異なる集合上のファジィ集合の間の演算を，主として定義域の異なる所属関数の間の演算を通して考えた．

H 値写像は実質的には H の最小元 $\mathbf{0}$ 以外の値で定まることから，定義域の異なる H 値写像の間で順序関係や演算を定義することが可能となる．本稿では普通の写像の制限を拡張した「写像の制限」を用いたが，ほかの方法でも順序や演算を定義することができる．

例えば，写像の「台」を用いてもよい．H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$ に対し，集合 $\mathrm{supp}(\mu) = \{x \in X; \mu(x) > \mathbf{0}\}$ を，μ の台（support）という．H 値写像 $\mu : X \longrightarrow H$, $\nu : Y \longrightarrow H$ に対して，補題 3.2 より，

$$\mu \preceq \nu \iff \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathrm{supp}(\nu) \text{ かつ } \mu(x) \leq \nu(x) \ \ (\forall x \in \mathrm{supp}(\mu)),$$
$$\mu \simeq \nu \iff \mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\nu) \text{ かつ } \mu(x) = \nu(x) \ \ (\forall x \in \mathrm{supp}(\mu))$$

が成り立つ．さらに，集合 $\mathrm{supp}(\mu) \cup \mathrm{supp}(\nu)$（またはその部分集合）を定義域として，$\mu \wedge \nu$, $\mu \vee \nu$, $\mu \setminus \nu$ を定めることができる．

また，十分大きな集合 U を取り，H 値写像を U に拡張したうえで定義することもできる．すなわち，写像 $\mu : X \longrightarrow H$ の定義域を U に拡張して，$U \setminus X$ 上では常に値 $\mathbf{0}$ を取る写像を，$\bar{\mu} : U \longrightarrow H$ と定義する（$\bar{\mu} = \mu \restriction U$ となる）．この U への拡張写像の間の順序や演算を用いて定義すればよい．

いずれの方法も実質的には同等であり，同じ台で値が一致する写像の間で，$\mathbf{0}$ の逆像の範囲によって定義域が異なるに過ぎない．

通常のファジィ文献では，同じ集合上のファジィ集合（所属関数）の間の関係や演算だけが扱われ，異なる集合上のファジィ集合の間の順序や集合演算に触れたものは（管見の限りでは）極めて少ない．僅かに [5] で異なる集合上のファジィ集合の間の演算が扱われているが，直積集合への「円柱（円筒的）拡張」を伴う複雑な構成である．

本稿で示した演算の拡張は，普通の集合演算と共通する自然な性質をもつ．所属関数の定義域の和集合上で定義するという簡単な構成であるから，応用にも適していると考えられる．

参考文献

[1] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theoey and Applications*, Academic Press, 1980.

[2] 小寺平治, 入門＝ファジィ数学, 遊星社, 1995.

[3] 水本雅晴, ファジイ理論とその応用, Information & Computing 19, サイエンス社, 1988.

[4] 水本雅晴編著, ファジィ集合, 講座ファジィ 第２巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[5] 向殿政男, ファジィ論理, 講座ファジィ 第４巻, 日刊工業新聞社, 1993.

[6] M. Shimoda, Categorical aspects of Heyting-valued models for intuitionistic set theory, *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli*, 30(1), 17–35, 1981.

[7] 下田守, ファジィ集合の自然な解釈, 下関市立大学論集, 40(1-2), 309–320, 1996.

[8] 下田守, ファジィ関係の自然な解釈, 下関市立大学論集, 40(3), 179–192, 1997.

[9] 下田守, ファジィ写像の自然な解釈, 下関市立大学論集, 41(1-2), 187–200, 1997.

[10] 竹内外史, 直観主義的集合論, 紀伊國屋数学叢書 20, 紀伊國屋書店, 1980.

[11] 千谷慧子, ファジィの数学的基礎, 講座ファジィ 第１巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[12] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8(3), 338–353, 1965.