ファジィ写像の自然な解釈

下 田　　守

序

前2稿では，直観主義的集合論の階層モデルで解釈すると，ファジィ集合とファジィ関係の基本的な演算・関係・性質についてきわめて自然な対応が存在することを明らかにした（[14][15]）．本稿では，ファジィ写像についても同様に自然な対応が成り立つことを示す．

集合論で最も基本的な概念の一つである写像または関数のファジィ化は必ずしも一通りではないが，ファジィ理論の文献では，ファジィ写像をファジィ関係と同一視して定義した上でファジィ集合の像や逆像について論じている場合が多い．

しかし，本稿ではファジィ写像をある条件をみたすファジィ関係と考える．具体的には，直観主義的集合論の階層モデルの中の写像を一般のファジィ写像とみなし，普通の集合の間のファジィ写像を，ファジィ集合・ファジィ関係の場合と同様に定義する．すると，普通の集合の間のファジィ関係がファジィ写像となるために所属関数がみたす条件が自然な形で得られる．さらに，ファジィ写像による集合の像や逆像などについて自然な関係が成り立つことが示される．ザデーの拡張原理は，普通の写像の拡張による像や逆像がファジィ集合になることを示すものと考えられる．

なお，前2稿（[14][15]）で用いた記号・用語の定義や性質などは既知とする．

1　V^Hにおける写像

はじめに，普通の（クリスプ）集合における写像および写像・関係の像・逆像について，主な定義と記号を確認しておく．

まず，写像は関係の特別な場合として，次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&f\text{が集合}X\text{から集合}Y\text{への写像}\ (f: X \longrightarrow Y)\\
&\Longleftrightarrow f \subseteq X \times Y \land (\forall x \in X)\exists y(\langle xy\rangle \in f)\\
&\qquad \land \forall x \forall y \forall z(\langle xy\rangle \in f \land \langle xz\rangle \in f \to y = z)
\end{aligned}
$$

$x \in X$，$y \in Y$ が $\langle xy\rangle \in f$ をみたすとき，y を（f による）x の値といい，$f(x) = y$ または $f : x \longmapsto y$ とかく．写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow Z$ に対して，合成 $g \circ f$ を，$g \circ f(x) = g(f(x))$ $(\forall x \in X)$ によって定義する．すなわち，$g \circ f : X \longrightarrow Z$; $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$．

次に，関係と写像の像や逆像に関する記号・用語を簡単に紹介する．

集合 X と Y の間の関係 R と集合 $A \subseteq X$，$B \subseteq Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
R(A) &= \{y \in Y; (\exists x \in A)xRy\},\\
R^{-1}(B) &= \{x \in X; (\exists y \in B)xRy\}
\end{aligned}
$$

を，それぞれ（R による）A の像，B の逆像という．$R(A) \subseteq Y$ かつ $R^{-1}(B) \subseteq X$ となる．特に，$\mathrm{dom}R = R^{-1}(Y)$ を R の定義域，$\mathrm{rng}R = R(X)$ を R の値域という．

写像 $f : X \longrightarrow Y$ と集合 $A \subseteq X$，$B \subseteq Y$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \{f(x); x \in A\},\\
f^{-1}(B) &= \{x \in X; f(x) \in B\}
\end{aligned}
$$

を，それぞれ（f による）A の像，B の逆像という．$f(A) \subseteq Y$ かつ $f^{-1}(B) \subseteq X$ である．$b \in Y$ に対して $f^{-1}(b) = \{x \in X; f(x) = b\}$ を b の逆像（または原像）という．$f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$ にほかならない．写像 $f : X \longrightarrow Y$ の定義域は常に $\mathrm{dom}f = X$ である．値域 $\mathrm{rng}f = f(X) = \{f(x); x \in X\}$ を f の像と呼び，$\mathrm{Im}f$ とかく．

V^Hにおける関係 R は,「R が関係である」という文をみたす V^H の元として定義された ([15]). すなわち, $u, v, R \in V^H$ とすると,

$$R \text{ が } V^H \text{における } u \text{ と } v \text{ の間の関係} \Longleftrightarrow \|R \subseteq u \times v\| = \mathbf{1}.$$

同様にして, V^Hにおける写像を次のように定義する.

定義 1.1. $u, v, f \in V^H$ とする. $\|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1}$ のとき, f が V^H における u から v への写像であるという. すなわち,

$$\begin{aligned} f \text{ が } V^H \text{における } u \text{ から } v \text{ への写像} &\Longleftrightarrow \|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1} \\ &\Longleftrightarrow \|f \subseteq u \times v\| = \|(\forall x \in u)\exists y(\langle xy \rangle \in f)\| \\ &\qquad = \|\forall x \forall y \forall z(\langle xy \rangle \in f \wedge \langle xz \rangle \in f \to y = z)\| = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

V^Hにおいて, 二つの写像の (関係としての) 合成は写像となる. すなわち, $\|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1}$ かつ $\|f : v \longrightarrow w\| = \mathbf{1}$ ならば, $\|g \circ f : u \longrightarrow w\| = \mathbf{1}$ となる. 写像の合成に関する諸性質は, 関係の場合とまったく同様に成り立つ ([15]).

V^Hにおける関係の像と逆像は, 次のように構成する.

定義 1.2. R が V^H における u と v の間の関係であるとする.

(1) $A \in V^H$ に対して, $R(A) \in V^H$ を次の式で定義する:

$$\mathcal{D}(R(A)) = \mathcal{D}v, \quad E(R(A)) = ER \wedge EA,$$
$$R(A) : y \longmapsto \bigvee_{x \in \mathcal{D}A} \|x \in A \wedge xRy\|.$$

(2) $B \in V^H$ に対して, $R^{-1}(B) \in V^H$ を次の式で定義する:

$$\mathcal{D}(R^{-1}(B)) = \mathcal{D}u, \quad E(R^{-1}(B)) = ER \wedge EB,$$
$$R^{-1}(B) : x \longmapsto \bigvee_{y \in \mathcal{D}B} \|y \in B \wedge xRy\|.$$

$R(A)$, $R^{-1}(B)$ を, それぞれ関係 R による A の像, B の逆像という. 普通の関係の場合と同様に, $\mathrm{dom}R = R^{-1}(v)$ を R の定義域, $\mathrm{rng}R = R(u)$ を R の値域という.

補題 1.1. $u, v, R, A, B \in V^H$かつ $\|R \subseteq u \times v\| = \mathbf{1}$ とする.

(1) $\|R(A) \subseteq v\| = \mathbf{1}$,

$\|y \in R(A)\| = \|(\exists x \in A) xRy\| \qquad (\forall y \in V^H)$.

(2) $\|R^{-1}(B) \subseteq u\| = \mathbf{1}$,

$\|x \in R^{-1}(B)\| = \|(\exists y \in B) xRy\| \qquad (\forall x \in V^H)$.

写像は関係の特別な場合であるから，写像による像と逆像については上の定義を適用すればよいが，具体的には次のように構成できる.

定義 1.3. f が V^Hにおける u から v への写像であるとする.

(1) $A \in V^H$ に対して，$f(A) \in V^H$ を次の式で定義する：

$$\mathcal{D}(f(A)) = \mathcal{D}v, \quad E(f(A)) = Ef \wedge EA,$$
$$f(A) : y \longmapsto \bigvee_{x \in \mathcal{D}A} \|x \in A \wedge f(x) = y\|.$$

(2) $B \in V^H$ に対して，$f^{-1}(B) \in V^H$ を次の式で定義する：

$$\mathcal{D}(f^{-1}(B)) = \mathcal{D}u, \quad E(f^{-1}(B)) = Ef \wedge EB,$$
$$f^{-1}(B) : x \longmapsto \bigvee_{y \in \mathcal{D}B} \|y \in B \wedge f(x) = y\|.$$

V^Hにおける u から v への写像 f の定義域 $\mathrm{dom} f = f^{-1}(v)$ について，常に $\|\mathrm{dom} f = u\| = \mathbf{1}$ が成り立つ．また，f の値域 $\mathrm{rng} f = f(u)$ を f の像と呼び，$\mathrm{Im} f$ とかく.

補題 1.2. $u, v, f, A, B \in V^H$かつ $\|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1}$ とする.

(1) $\|f(A) \subseteq v\| = \mathbf{1}$,

$\|y \in f(A)\| = \|(\exists x \in A)(f(x) = y)\| \qquad (\forall y \in V^H)$.

(2) $\|f^{-1}(B) \subseteq u\| = \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}\|x \in f^{-1}(B)\| &= \|(\exists y \in B)(f(x) = y)\| \\ &= \|f(x) \in B\| \qquad (\forall x \in V^H).\end{aligned}$$

像または逆像に関する性質の大半は普通の集合と同様に成り立つ．以下，$u, v, R, f \in V^H$で，$\|R \subseteq u \times v\| = \|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1}$ とする．また，$A, B, C, D \in V^H$とする．

命題 1.1.

(1) $\|A \subseteq B\| \leqslant \|R(A) \subseteq R(B)\| \wedge \|f(A) \subseteq f(B)\|$.

(2) $\|C \subseteq D\| \leqslant \|R^{-1}(C) \subseteq R^{-1}(D)\| \wedge \|f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)\|$.

命題 1.2.

(1) $\|R(A \cap B) \subseteq R(A) \cap R(B)\| = \mathbf{1}$,
$\|f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)\| = \mathbf{1}$.

(2) $\|R^{-1}(C \cap D) \subseteq R^{-1}(C) \cap R^{-1}(D)\| = \mathbf{1}$,
$\|f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\| = \mathbf{1}$.

(3) $\|R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)\| = \mathbf{1}$,
$\|f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\| = \mathbf{1}$.

(4) $\|R^{-1}(C \cup D) = R^{-1}(C) \cup R^{-1}(D)\| = \mathbf{1}$,
$\|f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)\| = \mathbf{1}$.

命題 1.3.

(1) $\|A \cap \mathrm{dom}R \subseteq R^{-1}(R(A))\| = \mathbf{1}$,
$\|A \cap u \subseteq f^{-1}(f(A))\| = \mathbf{1}$.

(2) $\|B \cap \mathrm{rng}R \subseteq R(R^{-1}(B))\| = \mathbf{1}$,
$\|B \cap \mathrm{Im}f = f(f^{-1}(B))\| = \mathbf{1}$.

命題 1.4.

(1) $\|R(A) \setminus R(B) \subseteq R(A \setminus B)\| = \mathbf{1}$,
$\|f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)\| = \mathbf{1}$.

(2) $\|R^{-1}(C) \setminus R^{-1}(D) \subseteq R^{-1}(C \setminus D)\| = \mathbf{1}$,
$\|f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D)\| = \mathbf{1}$.

(3) $\|\mathrm{rng}R = v\| \leqslant \|v \setminus R(A) \subseteq R(u \setminus A)\|$,
$\|\mathrm{rng}f = v\| \leqslant \|v \setminus f(A) \subseteq f(u \setminus A)\|$.

(4) $\|\mathrm{dom}R = u\| \leqslant \|u \setminus R^{-1}(C) \subseteq R^{-1}(v \setminus C)\|$,
$\|u \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(v \setminus C)\| = \mathbf{1}$.

2 H ファジィ写像

H ファジィ写像は H ファジィ関係 ([15]) の特別な場合として定義される．以下，X, Y, Z を普通の集合として，$u, v, f \in V^H$ とする．

定義 2.1.
(1) V^Hにおける u から v への写像を u から v への H ファジィ写像という．すなわち，

$$f \text{ が } u \text{ から } v \text{ への } H \text{ ファジィ写像} \Longleftrightarrow \|f : u \longrightarrow v\| = \mathbf{1}.$$

(2) $\check{X}$から$\check{Y}$への H ファジィ写像を X から Y への H ファジィ写像という．すなわち，

$$f \text{ が } X \text{ から } Y \text{ への } H \text{ ファジィ写像} \Longleftrightarrow \|f : \check{X} \longrightarrow \check{Y}\| = \mathbf{1}.$$

X から Y への H ファジィ写像 f と Y から Z への H ファジィ写像 g の合成 $g \circ f$ は X から Z への H ファジィ写像となる，しかし，ファジィ写像の逆関係はファジィ写像になるとは限らない．

以下，集合上の H ファジィ関係の所属関数は，原則として最も自然なものを考える．例えば，f が集合 X と集合 Y の間の H ファジィ関係のとき，その所属関数は，直積集合 $X \times Y$ 上の関数

$$\mu_f : X \times Y \longrightarrow H; \quad \langle xy \rangle \longmapsto \|\langle xy \rangle^{\vee} \in f\|$$

とする．

定理 1.
(1) 集合 X と Y の間の H ファジィ関係 f の集合 $X \times Y$ 上の所属関数を $\psi = \mu_f$ とする．f が X から Y への H ファジィ写像であるための必要十分条件は，写像ψが次の 2 条件 (E)(U) をみたすことである：

$$\text{(E)} \quad \bigvee_{y \in Y} \psi\langle xy \rangle = \mathbf{1} \qquad (\forall x \in X),$$

$$\text{(U)} \quad \psi\langle xy \rangle \wedge \psi\langle xz \rangle > \mathbf{0} \Longrightarrow y = z \qquad (\forall x \in X, \forall y, z \in Y).$$

(2) 写像 $\psi : X \times Y \longrightarrow H$ が上の 2 条件 (E)(U) をみたすとき，ψを所属関数とする X から Y への H ファジィ写像 f が存在する．すなわち，適当な $f \in V^H$によって，$\|f : \check{X} \longrightarrow \check{Y}\| = \mathbf{1}$ かつ $\mu_f = \psi$となる．

証明.

(1) f を X と Y の間の H ファジィ関係，集合 $X \times Y$ 上の f の所属関数を $\psi = \mu_f$ とする．$\|f \subseteq \check{X} \times \check{Y}\| = \mathbf{1}$ だから，f が X から Y への H ファジィ写像であるためには次の 2 条件が必要十分である．

$$\|(\forall u \in \check{X})\exists v(\langle uv\rangle \in f)\| = \mathbf{1} \tag{1}$$

$$\|\forall u \forall v \forall w(\langle uv\rangle \in f \wedge \langle uw\rangle \in f \to v = w)\| = \mathbf{1}. \tag{2}$$

まず，

$$\begin{aligned}
&\|(\forall u \in \check{X})\exists v(\langle uv\rangle \in f)\| \\
&= \|(\forall u \in \check{X})(\exists v \in \check{Y})(\langle uv\rangle \in f)\| \\
&= \bigwedge_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} \|\langle \check{x}\check{y}\rangle \in f\| = \bigwedge_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} \|\langle xy\rangle^{\vee} \in f\| \\
&= \bigwedge_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} \psi\langle xy\rangle
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\|(\forall u \in \check{X})\exists v(\langle uv\rangle \in f)\| = \mathbf{1} \\
&\iff \bigwedge_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} \psi\langle xy\rangle = \mathbf{1} \\
&\iff \bigvee_{y\in Y} \psi\langle xy\rangle = \mathbf{1} \qquad (\forall x \in X).
\end{aligned}$$

すなわち，条件 (1) は条件 (E) と同値．

また，

$$\begin{aligned}
&\|\forall u \forall v \forall w(\langle uv\rangle \in f \wedge \langle uw\rangle \in f \to v = w)\| \\
&= \|(\forall u \in \check{X})(\forall v, w \in \check{Y})(\langle uv\rangle \in f \wedge \langle uw\rangle \in f \to v = w)\| \\
&= \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y,z\in Y} \|\langle \check{x}\check{y}\rangle \in f \wedge \langle \check{x}\check{z}\rangle \in f \to \check{y} = \check{z}\| \\
&= \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y,z\in Y} (\psi\langle xy\rangle \wedge \psi\langle xz\rangle \to \|\check{y} = \check{z}\|)
\end{aligned}$$

であるから,

$$\|\forall u\forall v\forall w(\langle uv\rangle\in f\wedge\langle uw\rangle\in f\to v=w)\|=\mathbf{1}.$$

$$\Longleftrightarrow \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y,z\in Y}(\psi\langle xy\rangle\wedge\psi\langle xz\rangle\to\|\check{y}=\check{z}\|)=\mathbf{1}$$

$$\Longleftrightarrow \psi\langle xy\rangle\wedge\psi\langle xz\rangle\leqslant\|\check{y}=\check{z}\|\qquad(\forall x\in X,\forall y,z\in Y)$$

となり,

$$\|\check{y}=\check{z}\|=\begin{cases}\mathbf{1} & (y=z)\\ \mathbf{0} & (y\neq z)\end{cases}$$

だから, 条件 (2) は条件 (U) と同値になる.

(2) 写像 $\psi:X\times Y\longrightarrow H$ が2条件 (E)(U) をみたすとする. $f\in V^H$ を次の式で定義する：

$$\mathcal{D}f=\mathcal{D}(\check{X}\times\check{Y})=\{\langle xy\rangle^{\vee};x\in X,y\in Y\},\quad Ef=\mathbf{1},$$
$$f:\langle xy\rangle^{\vee}\longmapsto\psi\langle xy\rangle.$$

まず, 定義より明らかに, $\|f\subseteq\check{X}\times\check{Y}\|=\mathbf{1}$ であり,

$$\|\langle xy\rangle^{\vee}\in f\|=f(\langle xy\rangle^{\vee})=\psi\langle xy\rangle\qquad(\forall x\in X,\forall y\in Y)$$

だから, $\mu_f=\psi$ が成り立つ.

次に, 条件 (E) より,

$$\|(\forall u\in\check{X})\exists v(\langle uv\rangle\in f)\|=\bigwedge_{x\in X}\bigvee_{y\in Y}\psi\langle xy\rangle=\mathbf{1}$$

である. さらに, 条件 (U) を用いて,

$$\|\forall u\forall v\forall w(\langle uv\rangle\in f\wedge\langle uw\rangle\in f\to v=w)\|$$
$$=\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y,z\in Y}(\psi\langle xy\rangle\wedge\psi\langle xz\rangle\to\|\check{y}=\check{z}\|)=\mathbf{1}$$

となる. したがって, $\|f:\check{X}\longrightarrow\check{Y}\|=\mathbf{1}$ が成り立つ.

次に, H ファジィ写像による像と逆像について考える.

定理 2. f を X から Y への H ファジィ写像，集合 $X \times Y$ 上の f の所属関数をμ_fとする.

(1) 任意の $A \in V^H$に対し，像 $f(A)$ は Y の H ファジィ集合であり，$A, f(A)$ の集合 X, Y 上の所属関数をそれぞれ$\mu_A, \mu_{f(A)}$とすると，

$$\mu_{f(A)}(y) = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \mu_f\langle xy \rangle) \qquad (\forall y \in Y).$$

(2) 任意の $B \in V^H$に対し，逆像 $f^{-1}(B)$ は X の H ファジィ集合であり，$B, f^{-1}(B)$ の集合 Y, X 上の所属関数をそれぞれ$\mu_B, \mu_{f^{-1}(B)}$とすると，

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_B(y) \wedge \mu_f\langle xy \rangle) \qquad (\forall x \in X).$$

証明. f が X から Y への H ファジィ写像とすると，$\|f : \check{X} \longrightarrow \check{Y}\| = \mathbf{1}$.

(1) $A \in V^H$とすると，補題 1.2(1) より，$\|f(A) \subseteq \check{Y}\| = \mathbf{1}$.

$\mathcal{D}f(A) = \mathcal{D}\check{Y} = \{\check{y}\,; y \in Y\}$ かつ $\|f \subseteq \check{X} \times \check{Y}\| = \mathbf{1}$ だから，任意の $y \in Y$ に対して，補題 1.2(1) を用いて，

$$\begin{aligned}\mu_{f(A)}(y) &= \|\check{y} \in f(A)\| = \|(\exists u \in A)(f(u) = \check{y})\| \\ &= \|\exists u \in \check{X}\ (u \in A \wedge \langle u\,\check{y}\rangle \in f)\| \\ &= \bigvee_{x \in X} \|\check{x} \in A \wedge \langle \check{x}\check{y}\rangle \in f\| = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \mu_f\langle xy \rangle).\end{aligned}$$

(2) $B \in V^H$とすると，補題 1.2(2) より，$\|f^{-1}(B) \subseteq \check{X}\| = \mathbf{1}$.

$\mathcal{D}f^{-1}(B) = \mathcal{D}\check{X} = \{\check{x}\,; x \in X\}$ かつ $\|f \subseteq \check{X} \times \check{Y}\| = \mathbf{1}$ だから，任意の $x \in X$ に対して，補題 1.2(2) を用いて，

$$\begin{aligned}\mu_{f^{-1}(B)}(x) &= \|\check{x} \in f^{-1}(B)\| = \|(\exists v \in B)(f(\check{x}) = v\|) \\ &= \|\exists v \in \check{Y}\ (v \in B \wedge \langle \check{x}\ v\rangle \in f)\| \\ &= \bigvee_{y \in Y} \|\check{y} \in B \wedge \langle \check{x}\check{y}\rangle \in f\| = \bigvee_{y \in Y} (\mu_B(y) \wedge \mu_f\langle xy \rangle).\end{aligned}$$

注意. 定理 2 で，H ファジィ写像 f のかわりに H ファジィ関係 R としても，まったく同様の結果が成り立つ.

定義 2.2. 普通の集合の間の写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ に対して，次の式で定義される $\widetilde{\varphi} \in V^H$を φ の拡張（または拡張 H ファジィ写像）という．

$$\mathcal{D}\widetilde{\varphi} = \mathcal{D}(\check{X} \times \check{Y}) = \{\langle xy\rangle^\vee ; x \in X, y \in Y\}, \quad E\widetilde{\varphi} = \mathbf{1},$$
$$\widetilde{\varphi} : \langle xy\rangle^\vee \longmapsto \|(\varphi(x))^\vee = \check{y}\| = \begin{cases} \mathbf{1} & (\varphi(x) = y), \\ \mathbf{0} & (\varphi(x) \neq y). \end{cases}$$

命題 2.1. 普通の写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ に対して，拡張 $\widetilde{\varphi}$ は集合 X から集合 Y への H ファジィ写像であり，

$$\|\widetilde{\varphi}(\check{x}) = (\varphi(x))^\vee\| = \mathbf{1} \qquad (\forall x \in X).$$

証明. $f = \widetilde{\varphi}$とおくと，定義より明らかに，$\|f \subseteq \check{X} \times \check{Y}\| = \mathbf{1}$．すなわち，$f$ は集合 X と Y の間のファジィ関係．そこで，集合 $X \times Y$ 上の f の所属関数を$\psi = \mu_f : X \times Y \longrightarrow H$ とすると，

$$\psi\langle xy\rangle = \|\langle xy\rangle^\vee \in f\| = \|(\varphi(x))^\vee = \check{y}\| \qquad (\forall x \in X, \forall y \in Y).$$

したがって，任意の $x \in X$，$y \in Y$ に対して，

$$\bigvee_{y \in Y} \psi\langle xy\rangle = \bigvee_{y \in Y} \|(\varphi(x))^\vee = \check{y}\| = \|(\varphi(x))^\vee = (\varphi(x))^\vee\| = \mathbf{1}.$$

また，任意の $x \in X$，$y, z \in Y$ に対して，

$$\psi\langle xy\rangle \wedge \psi\langle xz\rangle = \|(\varphi(x))^\vee = \check{y}\| \wedge \|(\varphi(x))^\vee = \check{z}\| \leqslant \|\check{y} = \check{z}\|$$

だから，$\psi\langle xy\rangle \wedge \psi\langle xz\rangle > \mathbf{0}$ ならば $\|\check{y} = \check{z}\| = \mathbf{1}$, すなわち，$y = z$. $\psi = \mu_f$は定理 1 の条件 (E)(U) をみたすから，$\|f : \check{X} \longrightarrow \check{Y}\| = \mathbf{1}$.

次に，任意の $x \in X$ に対して，$\varphi(x) \in Y$ だから，

$$\|\langle x\varphi(x)\rangle^\vee \in f\| = \bigvee_{\langle zy\rangle \in X \times Y} f(\langle zy\rangle^\vee) \wedge \|\langle x\varphi(x)\rangle^\vee = \langle zy\rangle^\vee\|$$
$$= \bigvee_{y \in Y} \|(\varphi(x))^\vee = \check{y}\| = \|(\varphi(x))^\vee = (\varphi(x))^\vee\| = \mathbf{1}.$$

したがって，任意の $x \in X$ に対して，$\|f(\check{x}) = (\varphi(x))^\vee\| = \mathbf{1}$.

定理 3. $\varphi : X \longrightarrow Y$ を普通の集合の間の写像，$\widetilde{\varphi}$をその拡張とする．
(1) 任意の $A \in V^H$に対して，$\widetilde{\varphi}(A)$ は Y の H ファジィ集合であり，$A, \widetilde{\varphi}(A)$ の集合 X, Y 上の所属関数をそれぞれ$\mu_A, \mu_{\widetilde{\varphi}(A)}$ とすると，

$$\mu_{\widetilde{\varphi}(A)}(y) = \bigvee_{\substack{x \in X \\ \varphi(x)=y}} \mu_A(x) \qquad (\forall y \in Y).$$

(2) 任意の $B \in V^H$に対して，$\widetilde{\varphi}^{-1}(B)$ は X の H ファジィ集合であり，$B, \widetilde{\varphi}^{-1}(B)$ の集合 Y, X 上の所属関数をそれぞれ$\mu_B, \mu_{\widetilde{\varphi}^{-1}(B)}$とすると，

$$\mu_{\widetilde{\varphi}^{-1}(B)}(x) = \mu_B(\varphi(x)) \qquad (\forall x \in X).$$

証明． 命題 2.1 より，$\| \widetilde{\varphi} : \check{X} \longrightarrow \check{Y} \| = \mathbf{1}$.
(1) 補題 1.2(1) によって，$\| \widetilde{\varphi}(A) \subseteq \check{Y} \| = \mathbf{1}$. すなわち，$\widetilde{\varphi}(A)$ は Y の H ファジィ集合である．
また，定理 2(1) より，任意の $y \in Y$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{\varphi}(A)}(y) &= \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \mu_{\widetilde{\varphi}}\langle xy \rangle) = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \| \langle xy \rangle^{\vee} \in \widetilde{\varphi} \|) \\ &= \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \| (\varphi(x))^{\vee} = \check{y} \|) = \bigvee_{\substack{x \in X \\ \varphi(x)=y}} \mu_A(x).\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に補題 1.2(2) より，$\| \widetilde{\varphi}^{-1}(B) \subseteq \check{X} \| = \mathbf{1}$. すなわち，$\widetilde{\varphi}^{-1}(B)$ は X の H ファジィ集合である．
定理 2(2) を用いて，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{\varphi}^{-1}(B)}(x) &= \bigvee_{y \in Y} (\mu_B(x) \wedge \mu_{\widetilde{\varphi}}\langle xy \rangle) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_B(x) \wedge \| \langle xy \rangle^{\vee} \in \widetilde{\varphi} \|) \\ &= \bigvee_{y \in Y} (\mu_B(x) \wedge \| (\varphi(x))^{\vee} = \check{y} \|) = \mu_B(\varphi(x)).\end{aligned}$$

この定理は，いわゆるザデーの拡張原理に相当する．

結

ファジィ理論の文献では，ファジィ写像はファジィ関係の別称または同等の概念として定義されてきた（[2][5][8][9][10]）．

以下，集合 X のファジィ集合全体の集合を $\mathcal{F}(X)$ とかく．集合 X と集合 Y の間のファジィ関係 R に対し，

$$\mu_R\langle xy\rangle = \mu_{F(x)}(y) \qquad (\forall x \in X, y \in Y)$$

をみたす写像 $F : X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ が自然に定義され，逆に，写像 F から上の関係をみたす R を構成できる．また，X と Y の間のファジィ関係 R から，像と逆像を対応させる２つの写像

$$Im_R : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y); \quad A \longmapsto R(A),$$
$$R^{-1} : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X); \quad B \longmapsto R^{-1}(B)$$

が導かれる（定理２の後の注意参照）．このような写像を導くので，ファジィ関係がファジィ写像とも呼ばれたらしい．しかし，まったく同じ対象に異なる名称を付けることは不自然で，ファジィ関係を扱ってもファジィ写像には触れない文献も少なくない．

本稿では，直観主義的集合論の階層モデルにおける写像をファジィ写像と定義して，像や逆像などの基本的な性質が自然に導かれることを示した．また，集合上のファジィ関係がファジィ写像になるために所属関数がみたす条件を与えた．なお，文献 [1][3] には，ファジィ関係を含むさまざまなファジィ関数の定義が紹介されているが，本稿のファジィ写像と同じ形の定義はない．

ただし，H が実数の閉区間 $[0,1]$ の場合は，本稿の集合の間のファジィ写像は，普通の写像の拡張と実質的に同じものとなる．すなわち，$H = [0,1]$ のとき，集合 X から集合 Y への H ファジィ写像 f の所属関数 $\psi = \mu_f : X \times Y \longrightarrow H$ は定理１の２条件 (E)(U) をみたすので，任意の $x \in X$ に対し，$\psi\langle xy\rangle = 1$ となる $y \in Y$ がただ一つ存在して，y 以外の $z \in Y$ に対しては $\psi\langle xz\rangle = 0$ となる．したがって，

$$\varphi(x) = y \Longleftrightarrow \psi\langle xy\rangle = 1 \qquad (\forall x \in X, \forall y \in Y)$$

によって，普通の写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ を定義することができる．このとき，$\mu_f = \psi = \mu_{\widetilde{\varphi}}$ だから，$\|f = \widetilde{\varphi}\| = \mathbf{1}$ となる（[14] 定理３）．

ザデーの拡張原理（[19]）は，ファジィ理論における最も重要な概念と言われる（[11]）．拡張原理の最も一般的な形は，普通の写像の拡張としてファジィ集合にファジィ集合を対応させる写像を導くものである（[5][6][7][9][11][12][16][19]）．実際，普通の写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ に対し，定義 2.2 によって定まる拡張 $\widetilde{\varphi}$ から導かれる 2 つの写像

$$Im_{\widetilde{\varphi}} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y); \quad A \longmapsto \widetilde{\varphi}(A),$$
$$\widetilde{\varphi}^{-1} : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X); \quad B \longmapsto \widetilde{\varphi}^{-1}(B)$$

が，拡張原理で示される写像にほかならない（定理 3）．

なお，写像 $\varphi : X \longrightarrow Y$ の V^H への埋め込み $\check{\varphi}$ も，$\widetilde{\varphi}$ と同じ役割を果たす．すなわち，$\|\check{\varphi} : \check{X} \longrightarrow \check{Y}\| = \mathbf{1}$ かつ $\|\check{\varphi} = \widetilde{\varphi}\| = \mathbf{1}$ が成り立つ．

参考文献

[1] 浅居喜代治・C. V. Negoita 他編著, ファジィシステム理論入門（旧書名：あいまいシステム理論入門）, オーム社, 第 5 刷, 1987（第 1 刷, 1978）．

[2] S. S. L. Chang and L. A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 2(1), 30–34, 1972.

[3] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theoey and Applications*, Academic Press, 1980.

[4] S. Gottwald, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Foundations of Application — from a Mathematical Point of View*, Vieweg, 1993.

[5] 本多中二・大里有生, ファジィ工学入門, 海文堂, 1989.

[6] G. J. Klir, U. St. Clair, and B. Yuan, *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications*, Prentice-Hall, 1997.

[7] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice-Hall, 1995.

[8] 小寺平治, 入門＝ファジィ数学, 遊星社, 1995.

[9] 水本雅晴, ファジイ理論とその応用, Information & Computing 19, サイエンス社, 1988.

[10] 大里有生, ファジィ関係, 水本雅晴編著『ファジィ集合』第２章, 65–133, 講座ファジィ第２巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[11] 坂和正敏, ファジィ理論の基礎と応用, 森北出版, 1989.

[12] K. J. シュマッカー, 鬼沢武久訳, ファジィ集合 — 自然言語演算とリスク解析, 啓学出版, 1990.（原著：K. J. Schmucker, *Fuzzy Set, Natural Language Computations, and Risk Analysis*, Computer Science Press, 1984.）

[13] M. Shimoda, Categorical aspects of Heyting-valued models for intuitionistic set theory, *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli*, 30(1), 17–35, 1981.

[14] 下田守, ファジィ集合の自然な解釈, 下関市立大学論集, 40(1-2), 309–320, 1996.

[15] 下田守, ファジィ関係の自然な解釈, 下関市立大学論集, 40(3), 179–192, 1997.

[16] 田中英夫, ファジィモデリングとその応用, システム制御情報ライブラリー２, 朝倉書店, 1990.

[17] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8(3), 338–353, 1965.

[18] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Information Sciences*, 3(2), 177–200, 1971.

[19] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, *Information Sciences*, 8(3), 199–249, 1975.