ファジィ関係の自然な解釈

下　田　　　守

序

ファジィ理論の基礎となるファジィ集合やファジィ関係の最も基本的な概念や主な演算の数学的な意味は，今まで必ずしも十分には明らかにされていなかった．前稿 [17] では，ファジィ集合については，直観主義的集合論の階層モデルで解釈すると，基本的な概念や演算について自然な対応が成り立つことを示した．

ファジィ理論においてファジィ集合に次いで基礎的な概念で応用上も重要なファジィ関係は，直積集合のファジィ部分集合として定義される．関係で最も基本的な演算である合成にはさまざまな演算が数式で提案され，逆関係や同値関係・順序関係の諸条件についても，ファジィ集合の場合と同様に二値の特性関数の拡張としての定義が数式で与えられるだけであり，これらの数式の内容的な意味は必ずしも明らかにされていないと見受けられる．

本稿では，ファジィ関係についてもファジィ集合の場合とまったく同様に，直観主義的集合論のモデルにおいて自然な対応関係が成り立つことを示す．このモデルにおいては，ファジィ関係の合成では最も一般的に用いられる max-min 合成が，普通の集合における合成関係とまったく同じ意味を持つことを明らかにする．また，逆関係や，同値関係・順序関係などについても普通の集合と同様の意味で解釈できることを示す．

1　V^Hにおける関係

以下，ある完備ハイティング代数Hを真理値集合とする直観主義的集合論のモデルV^Hを考える．[17] で用いた記号・用語の定義や性質などは既知とする．前後の文脈から明らかなときは，$\langle x,y\rangle^H$を $\langle xy\rangle$，$(u\times v)^H$を $u\times v$ などと略記することがある．なお，[17] の定義等の一部は修正を要する（本稿末尾の「前稿の訂正」参照）．

普通の（クリスプ）集合において関係は直積集合の部分集合として定義されるが，V^Hにおける関係もまったく同様に考えることができる．

定義 1.1　V^Hの元u,vに対して，直積$(u\times v)^H$の部分集合を，V^Hにおけるuとvの間の関係という．すなわち，$R\in V^H$に対して，

$$R\text{が}\ u\ \text{と}\ v\ \text{の間の関係} \iff R\sqsubseteq u\times v \iff \|R\subseteq u\times v\| = \mathbf{1}.$$

uとvの間の関係を（V^Hにおける）uからvへの関係とも呼ぶ．特に，uとuの間の関係をu上の関係という．

一般に関係Rについて，$\langle xy\rangle\in R$をxRyなどと記すことがある．V^Hの中では，xRyは$\langle x,y\rangle^H\in R$ を略記したものに相当する．

補題 1.1　$R,S\in V^H$で，RをV^Hにおける関係とする．

$$R\sqsubseteq S \iff \text{任意の}\ x,y\in V^H\ \text{に対して}\ \|xRy\|\le\|xSy\|.$$

定義 1.2　V^Hの元uに対し，$I_u\in V^H$を次のように定義して，u上の恒等関係または相等関係という．

$$\mathcal{D}(I_u)=\{\langle xx\rangle; x\in\mathcal{D}u\},\quad E(I_u)=Eu,\quad I_u:\langle xx\rangle\longmapsto u(x).$$

補題 1.2　$u\in V^H$ とする．

(1)　$\|x\,I_u\,y\| = \|x\in u\|\wedge\|x=y\|\quad(\forall x,y\in V^H)$.

(2)　$\|z\in I_u\| = \|\exists x\in u\,(z=\langle xx\rangle)\|\quad(\forall z\in V^H)$.

(3)　$I_u\sqsubseteq u\times u$.

補題 1.3　$\alpha \in On$, $x, y \in V^H$とする.

(1)　$u \in V^H_\alpha$ とすると，ある $\beta < \alpha$ に対し $\mathcal{D}u \subseteq V^H_\beta$.

(2)　$\displaystyle\bigvee_{u \in V^H_{\alpha+1}} \|x \in u\| \leq \bigvee_{z \in V^H_\alpha} \|x = z\|$.

(3)　$\displaystyle\bigvee_{u,v \in V^H_\alpha} (\|x = u\| \wedge \|y = v\|) = \bigvee_{z \in V^H_{\alpha+1}} \|\{x, y\} = z\| = \bigvee_{z \in V^H_{\alpha+2}} \|\langle xy \rangle = z\|$.

(4)　$\displaystyle\bigvee_{z \in V^H_\alpha} \|\langle xy \rangle = z\| \leq \bigvee_{u,v \in V^H_\alpha} \|\langle xy \rangle = \langle uv \rangle\|$.

定義 1.3　$R, S \in V_\alpha$ に対して，合成 $S \circ R \in V^H_{\alpha+1}$を次のように定義する．ただし，$\beta$ は$\mathcal{D}R \cup \mathcal{D}S \subseteq V^H_\beta \subseteq V^H_\alpha$ をみたす順序数とする.

$$\mathcal{D}(S \circ R) = \{\langle xz \rangle; x, z \in V^H_\beta\}, \quad E(S \circ R) = ER \wedge ES,$$
$$S \circ R : \langle xz \rangle \longmapsto \|\exists y(xRy \wedge ySz)\|.$$

定義 1.4　$R \in V_\alpha$ に対して，逆関係 $R^{-1} \in V^H_\alpha$を次のように定義する．ただし，β は$\mathcal{D}R \subseteq V^H_\beta \subseteq V^H_\alpha$ をみたす順序数とする.

$$\mathcal{D}(R^{-1}) = \{\langle xy \rangle; x, y \in V^H_\beta\}, \quad E(R^{-1}) = ER,$$
$$R^{-1} : \langle xy \rangle \longmapsto \|yRx\|.$$

以上の定義において，順序数 β の選び方には影響されない．例えば，関係の合成 $S \circ R$の定義で順序数 β を γ に置き換えたものを $S * R$とすると，$S * R \approx S \circ R$が成り立つ．逆関係についても同様である.

補題 1.4　$u, v, w, R, S \in V^H$とする.

(1)　$\|x(S \circ R)z\| = \|\exists y(xRy \wedge ySz)\|$　$(\forall x, z \in V^H)$.

(2)　$\|t \in S \circ R\| = \|\exists x \exists y \exists z(t = \langle xz \rangle \wedge xRy \wedge ySz)\|$　$(\forall t \in V^H)$.

(3)　$R \sqsubseteq u \times v$ かつ $S \sqsubseteq v \times w$ ならば，$S \circ R \sqsubseteq u \times w$.

補題 1.5　$u, v, R \in V^H$とする.

(1)　$\|xR^{-1}y\| = \|yRx\|$　$(\forall x, y \in V^H)$.

(2)　$\|z \in R^{-1}\| = \|\exists x \exists y(z = \langle xy \rangle \wedge yRx)\|$　$(\forall z \in V^H)$.

(3)　$R \sqsubseteq u \times v$ ならば，$R^{-1} \sqsubseteq v \times u$.

(4)　$(u \times v)^{-1} \approx v \times u$.

合成や逆関係については，普通の集合と同様の性質が成り立つ．

命題 1.1　$u, v, R, S, T \in V^H$とする．

(1)　$R \sqsubseteq u \times v$ ならば，$R \circ I_u \sim R \sim I_v \circ R$.

(2)　$(T \circ S) \circ R \approx T \circ (S \circ R)$.

(3)　$T \circ (S \cap R) \sqsubseteq (T \circ S) \cap (T \circ R)$.

$(T \cap S) \circ R \sqsubseteq (T \circ R) \cap (S \circ R)$.

(4)　$T \circ (S \cup R) \approx (T \circ S) \cup (T \circ R)$.

$(T \cup S) \circ R \approx (T \circ R) \cup (S \circ R)$.

(5)　$R \sqsubseteq S$ ならば，$T \circ R \sqsubseteq T \circ S$.

$S \sqsubseteq T$ ならば，$S \circ R \sqsubseteq T \circ R$.

上の (3) で，逆向きの包含関係は一般には成り立たない．

命題 1.2　$u, v, R, S \in V^H$とする．

(1)　$(R^{-1})^{-1} \sqsubseteq R$.

$R \sqsubseteq u \times v$ ならば，$(R^{-1})^{-1} \approx R$.

(2)　$(R \cap S)^{-1} \approx R^{-1} \cap S^{-1}$.

$(R \cup S)^{-1} \approx R^{-1} \cup S^{-1}$.

(3)　$(R \setminus S)^{-1} \approx R^{-1} \setminus S^{-1}$.

$((u \times v) \setminus R)^{-1} \approx (v \times u) \setminus R^{-1}$.

(4)　$(S \circ R)^{-1} \approx R^{-1} \circ S^{-1}$.

(5)　$R \sqsubseteq S$ ならば，$R^{-1} \sqsubseteq S^{-1}$.

VからV^Hへの標準的な埋め込みについて，次の命題が成り立つ．

命題 1.3　任意の $x, y, u, v \in V$ に対して，次の各式が成り立つ．

(1)　$\{\check{x}, \check{y}\}^H = \{x, y\}^\vee$.

(2)　$\langle \check{x}, \check{y} \rangle^H = \langle x, y \rangle^\vee$.

(3)　$(\check{u} \times \check{v})^H = (u \times v)^\vee$.

同値関係・順序関係の要件となる性質は，普通の集合とまったく同様に定義することができる．以下，$u \in V^H$ とする．

定義 1.5　u 上の関係 R の諸性質を次のように定義する．

(1) R が反射的 $\iff \|(\forall x \in u)(xRx)\| = \mathbf{1}$.

(2) R が対称的 $\iff \|\forall x \forall y(xRy \to yRx)\| = \mathbf{1}$.

(3) R が推移的 $\iff \|\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \to xRz)\| = \mathbf{1}$.

(4) R が反対称的 $\iff \|\forall x \forall y(xRy \wedge yRx \to x = y)\| = \mathbf{1}$.

(5) R が比較可能 $\iff \|(\forall x \in u)(\forall y \in u)(xRy \vee yRx)\| = \mathbf{1}$.

反射的・対称的・推移的な関係を同値関係といい，反射的・反対称的・推移的な関係を順序関係という．比較可能な順序関係を，全順序関係または線形順序関係という．全順序と区別して，一般の順序を半順序と呼ぶこともある．

命題 1.4　R を u 上の関係とする．

(1) R が反射的 $\iff \|x \in u\| \le \|xRx\| \quad (\forall x \in V^H)$

$\iff I_u \sqsubseteq R$.

(2) R が対称的 $\iff \|xRy\| \le \|yRx\| \quad (\forall x, y \in V^H)$

$\iff \|xRy\| = \|yRx\| \quad (\forall x, y \in V^H)$

$\iff R^{-1} \sqsubseteq R$

$\iff R^{-1} \approx R$.

(3) R が推移的 $\iff \|xRy\| \wedge \|yRz\| \le \|xRz\| \quad (\forall x, y, z \in V^H)$

$\iff R \circ R \sqsubseteq R$.

(4) R が反対称的 $\iff \|xRy\| \wedge \|yRx\| \le \|x = y\| \quad (\forall x, y \in V^H)$

$\iff R \cap R^{-1} \sqsubseteq I_u$.

(5) R が比較可能

$\iff \|x \in u\| \wedge \|y \in u\| \le \|xRy\| \vee \|yRx\| \quad (\forall x, y \in V^H)$

$\iff u \times u \sqsubseteq R \cup R^{-1}$

$\iff u \times u \approx R \cup R^{-1}$.

2　Hファジィ関係

Hファジィ関係は，Hファジィ集合（[17]）の特別な場合として定義される．以下，X, Y, Zを空でない普通の（クリスプ）集合とする．

定義 2.1

(1) V^Hにおける関係をHファジィ関係という．すなわち，$R \in V^H$について，ある$u, v \in V^H$によって$R \sqsubseteq u \times v$となるとき，Rをuとvの間のHファジィ関係と呼ぶ．

任意の$R \in V^H$に対して，写像

$$\mu_R : X \times Y \longrightarrow H;\ \langle xy \rangle \longmapsto \|\langle xy \rangle^{\vee} \in R\| \quad (\forall x \in X, \forall y \in Y)$$

を，集合$X \times Y$上のRの所属関数またはメンバーシップ関数という．

(2) 直積集合$X \times Y$のHファジィ部分集合をXとYの間のHファジィ関係という．すなわち，$R \in V^H$について，

$$R\text{が}X\text{と}Y\text{の間の}H\text{ファジィ関係} \Longleftrightarrow R \sqsubseteq (X \times Y)^{\vee}.$$

XとYの間のHファジィ関係をXからYへのHファジィ関係とも呼ぶ．XとXの間のHファジィ関係をX上のHファジィ関係という．

特にHが実数の閉区間$[0, 1]$の場合に，XとYの間のHファジィ関係の所属関数が通常の（XとYの間の）ファジィ関係に相当する．次に，XとYの間のHファジィ関係がV^Hにおける$\check{X}$と$\check{Y}$の間の関係に他ならないことを示す．

命題 2.1　任意の$R \in V^H$について，次が成り立つ．

(1) RがXとYの間のHファジィ関係 $\Longleftrightarrow R \sqsubseteq (\check{X} \times \check{Y})^H$.

(2) $\mu_R \langle xy \rangle = \| \check{x}\ R\ \check{y} \| \quad (\forall x \in X, \forall y \in Y)$.

証明.

(1) 命題 1.3(3) より $(X \times Y)^{\vee} = (\check{X} \times \check{Y})^H$ だから，明らか．

(2) 命題 1.3(2) より，任意の$x \in X$, $y \in Y$に対して，

$$\mu_R \langle xy \rangle = \|\langle xy \rangle^{\vee} \in R\| = \|\langle \check{x}\check{y} \rangle^H \in R\| = \| \check{x}\ R\ \check{y} \|.$$

Hファジィ関係はHファジィ集合の一部であるから，ファジィ集合についての前稿の結果をそのまま当てはめることができる．

命題 2.2

(1) 任意の写像 $\mu : X \times Y \longrightarrow H$に対して，$\mu = \mu_R$ をみたす XとY の間の Hファジィ関係 Rが存在する．

(2) R, Sが XとYの間の Hファジィ関係で，$Z = (X \times Y)^\vee$ とすると，

$$R \sqsubseteq S \Longleftrightarrow \mu_R \leq \mu_S, \quad R \sim S \Longleftrightarrow \mu_R = \mu_S,$$

$$\mu_{R \cap S} = \mu_R \wedge \mu_S, \quad \mu_{R \cup S} = \mu_R \vee \mu_S, \quad \mu_{Z \setminus R} = \neg \mu_R.$$

証明. [17] 定理 1，定理 3，定理 5 を適用すればよい．

定理 1 Rが XとYの間の Hファジィ関係で，Sが YとZの間の Hファジィ関係とすると，合成 $S \circ R$は Xと Zの間の Hファジィ関係となり，所属関数について次の式が成り立つ．

$$\mu_{S \circ R}\langle xz \rangle = \bigvee_{y \in Y} (\mu_R\langle xy \rangle \wedge \mu_S\langle yz \rangle) \quad (\forall x \in X, \forall z \in Z).$$

証明. R, Sが条件をみたすとすると，命題 2.1(1) より，

$$R \sqsubseteq (\check{X} \times \check{Y})^H, \quad S \sqsubseteq (\check{Y} \times \check{Z})^H.$$

補題 1.4(3)，命題 1.3(3) より，$S \circ R \sqsubseteq (\check{X} \times \check{Z})^H = (X \times Z)^\vee$ だから，命題 2.1(1) より，$S \circ R$は Xと Zの間の Hファジィ関係となる．

次に，任意の $x \in X$, $z \in Z$に対して，命題 2.1(2)，補題 1.4(1)，命題 1.3(2) より，

$$\begin{aligned}\mu_{S \circ R}\langle xz \rangle &= \| \check{x} \, (S \circ R) \, \check{z} \| = \| \exists v (\check{x} \, R v \wedge v S \, \check{z}) \| \\ &= \| \exists v \in \check{Y} \, (\langle \check{x} \, v \rangle \in R \wedge \langle v \, \check{z} \rangle \in S) \| \\ &= \bigvee_{y \in Y} (\| \langle xy \rangle^\vee \in R \| \wedge \| \langle yz \rangle^\vee \in S \|) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_R\langle xy \rangle \wedge \mu_S\langle yz \rangle).\end{aligned}$$

この定理から，Hファジィ関係の V^Hにおける合成関係の所属関数は元の関係の所属関数の max-min 合成に相当することが分かる．

定理 2　Rが Xと Yの間の Hファジィ関係とすると，逆関係 R^{-1}は Yと Xの間の Hファジィ関係となり，次の式が成り立つ．

$$\mu_{R^{-1}}\langle yx\rangle = \mu_R\langle xy\rangle \quad (\forall x \in X, \forall y \in Y).$$

証明.　Rが Xと Yの間の Hファジィ関係とすると，命題 2.1(1) より，

$$R \sqsubseteq (\check{X} \times \check{Y})^H.$$

補題 1.5(3)，命題 1.3(3) より，$R^{-1} \sqsubseteq (\check{Y} \times \check{X})^H = (Y \times X)^\vee$ だから，再び命題 2.1(1) より，R^{-1}は Yと Xの間の Hファジィ関係となる．

次に，任意の $x \in X, y \in Y$に対して，命題 2.1(2)，補題 1.5(1) より，

$$\mu_{R^{-1}}\langle yx\rangle = \|\, \check{y}\; R^{-1}\; \check{x} \,\| = \|\, \check{x}\; R\; \check{y} \,\| = \mu_R\langle xy\rangle.$$

上の二定理によって，Hファジィ関係の V^Hにおける合成と逆関係は Hファジィ関係になるから，それぞれ Hファジィ関係としての合成および逆関係と定義する．また，V^Hにおける$\check{X}$上の関係として反射的であるとき，X上の Hファジィ関係は反射的であるという．対称的・推移的・同値関係・順序関係などの性質についても同様に定義する．

命題 2.3　集合 Xの対角集合を $\Delta = \Delta_X = \{\langle xx\rangle; x \in X\}$ とする．

(1)　$I_{\check{X}} = (\Delta_X)^\vee$

(2)　任意の $x, y \in X$ に対して，$\mu_{\check{\Delta}}(\langle xy\rangle) = \begin{cases} \mathbf{1} & (x = y) \\ \mathbf{0} & (x \neq y). \end{cases}$

証明.　命題 1.3(2)，命題 2.1(2) より明らか．

定理 3　Rを X上の Hファジィ関係とする．

(1)　Rが反射的 $\Longleftrightarrow \mu_R\langle xx\rangle = \mathbf{1} \quad (\forall x \in X).$

(2)　Rが対称的 $\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle = \mu_R\langle yx\rangle \quad (\forall x, y \in X).$

(3)　Rが推移的 $\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yz\rangle \leq \mu_R\langle xz\rangle \quad (\forall x, y, z \in X)$

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{y \in Y} (\mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yz\rangle) \leq \mu_R\langle xz\rangle \quad (\forall x, z \in X).$$

(4)　Rが反対称的

$$\Longleftrightarrow x \neq y \text{ ならば } \mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yx\rangle = \mathbf{0} \quad (\forall x, y \in X).$$

(5)　Rが比較可能 $\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle \vee \mu_R\langle yx\rangle = \mathbf{1} \quad (\forall x, y \in X).$

証明. RがX上のHファジィ関係とすると，$R \sqsubseteq (\check{X} \times \check{X})^H$ だから，

$$\begin{aligned}\|uRv\| &= \|uRv \wedge u \in \check{X} \wedge v \in \check{X}\| \\ &= \bigvee_{x,y \in X} (\|\check{x} R \check{y}\| \wedge \|u = \check{x}\| \wedge \|v = \check{y}\|) \quad (\forall u, v \in V^H).\end{aligned}$$

(1) 定義 1.5(1)，命題 2.1(2) より，

$$\begin{aligned}R\text{が反射的} &\Longleftrightarrow \|(\forall u \in \check{X})(uRu)\| = \mathbf{1} \quad (\forall u \in V^H) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} \in \check{X}\| \leq \|\check{x} R \check{x}\| \quad (\forall x \in X) \\ &\Longleftrightarrow \mu_R\langle xx\rangle = \mathbf{1} \quad (\forall x \in X).\end{aligned}$$

(2) 命題 1.4(2)，命題 2.1(2) より，

$$\begin{aligned}R\text{が対称的} &\Longleftrightarrow \|uRv\| = \|vRu\| \quad (\forall u, v \in V^H) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} R \check{y}\| = \|\check{y} R \check{x}\| \quad (\forall x, y \in X) \\ &\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle = \mu_R\langle yx\rangle \quad (\forall x, y \in X).\end{aligned}$$

(3) 命題 1.4(3)，命題 2.1(2) より，

$$\begin{aligned}&R\text{が推移的} \Longleftrightarrow \|uRv\| \wedge \|vRw\| \leq \|uRw\| \quad (\forall u, v, w \in V^H) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} R \check{y}\| \wedge \|\check{y} R \check{z}\| \leq \|\check{x} R \check{z}\| \quad (\forall x, y, z \in X) \\ &\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yz\rangle \leq \mu_R\langle xz\rangle \quad (\forall x, y, z \in X) \\ &\Longleftrightarrow \bigvee_{y \in Y} (\mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yz\rangle) \leq \mu_R\langle xz\rangle \quad (\forall x, z \in X).\end{aligned}$$

(4) 命題 1.4(4)，命題 2.1(2) より，

$$\begin{aligned}&R\text{が反対称的} \Longleftrightarrow \|uRv\| \wedge \|vRu\| \leq \|u = v\| \quad (\forall u, v \in V^H) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} R \check{y}\| \wedge \|\check{y} R \check{x}\| \leq \|\check{x} = \check{y}\| \quad (\forall x, y \in X) \\ &\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yx\rangle \leq \|\check{x} = \check{y}\| = \begin{cases} \mathbf{1} & (x = y) \\ \mathbf{0} & (x \neq y) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow x \neq y\text{ならば，}\ \mu_R\langle xy\rangle \wedge \mu_R\langle yx\rangle = \mathbf{0} \quad (\forall x, y \in X).\end{aligned}$$

(5) 定義 1.5(5)，命題 2.1(2) より，

Rが比較可能

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \|(\forall u \in \check{X})(\forall v \in \check{X})(uRv \vee vRu)\| = \mathbf{1} \quad (\forall u, v \in V^H) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} \in \check{X}\| \wedge \|\check{y} \in \check{X}\| \leq \|\check{x} R \check{y}\| \vee \|\check{y} R \check{x}\| \quad (\forall x, y \in X) \\ &\Longleftrightarrow \|\check{x} R \check{y}\| \vee \|\check{y} R \check{x}\| = \mathbf{1} \quad (\forall x, y \in X) \\ &\Longleftrightarrow \mu_R\langle xy\rangle \vee \mu_R\langle yx\rangle = \mathbf{1} \quad (\forall x, y \in X).\end{aligned}$$

この定理は，通常のファジィ同値関係が，$H=[0,1]$ の場合の V^H の中での同値関係の所属関数に相当することを示している．しかし，順序および全順序の要件となる反対称的・比較可能の二つの性質について，定理 (4)(5) の条件は通常の定義と見かけ上は異なっている．

このうち，反対称的の条件は実は同じになる．なぜなら，$H=[0,1]$ のとき，$p\wedge q=\min(p,q)$ $(\forall p,q\in H)$ だから，定理 3(4) より，

$$\begin{aligned}
R\text{が反対称的} &\iff x\neq y\text{ならば}\,\mu_R\langle xy\rangle\wedge\mu_R\langle yx\rangle=0\quad(\forall x,y\in X)\\
&\iff x\neq y\text{ならば}\,\min(\mu_R\langle xy\rangle,\mu_R\langle yx\rangle)=0\quad(\forall x,y\in X)\\
&\iff x\neq y\text{ならば，}\,\mu_R\langle xy\rangle=0\,\text{または}\,\mu_R\langle yx\rangle=0\quad(\forall x,y\in X)\\
&\iff \mu_R\langle xy\rangle>0\,\text{かつ}\,\mu_R\langle yx\rangle>0\,\text{ならば，}\,x=y\quad(\forall x,y\in X)
\end{aligned}$$

となり，ファジィ関連の文献（[6][8][14][15][24]）の定義と同値になる．

他方，比較可能の条件については，様子が異なる．$H=[0,1]$ のとき，$p\vee q=\max(p,q)$ $(\forall p,q\in H)$ だから，定理 3(5) によって，

$$\begin{aligned}
R\text{が比較可能} &\iff \mu_R\langle xy\rangle\vee\mu_R\langle yx\rangle=1\quad(\forall x,y\in X)\\
&\iff \max(\mu_R\langle xy\rangle,\mu_R\langle yx\rangle)=1\quad(\forall x,y\in X)\\
&\iff \mu_R\langle xy\rangle=1\,\text{または}\,\mu_R\langle yx\rangle=1\quad(\forall x,y\in X).
\end{aligned}$$

ところで，ファジィ理論の文献では，ザデー [24] 以来，比較可能性（全順序）の要件として次の条件 $\mathcal{C}$ を揚げている（[8][14]）．

$$\mathcal{C}:\ x\neq y\text{ならば，}\,\mu_R\langle xy\rangle>0\,\text{または}\,\mu_R\langle yx\rangle>0\quad(\forall x,y\in X).$$

関係 R が反射的な場合は $\mu_R\langle xx\rangle=1>0$ $(\forall x\in X)$ だから，条件 $\mathcal{C}$ の前件（「$x\neq y$ ならば」）を除いても同じ意味になる．そこで，一般の H ファジィ関係について，

$$R\text{が弱比較可能}\iff\mu_R\langle xy\rangle\vee\mu_R\langle yx\rangle>0\quad(\forall x,y\in X)$$

と定義すると，R が反射的な場合は先の条件 $\mathcal{C}$ と同値になる．明らかに，比較可能な関係は弱比較可能であるが，逆は必ずしも成り立たない．したがって，通常のファジィ理論で定義される全順序（線形順序）は，V^H における全順序よりも弱く，より幅広い概念である．

結

前節の諸結果によって，所属関数によって定義される，普通の集合 X と Y の間の通常のファジィ関係は，H が実数の閉区間 $[0,1]$ の場合の，集合 X と Y の間の H ファジィ関係の所属関数に他ならないことが明らかとなった．そして，ファジィ関係を直観主義的集合論のモデルでの関係と解釈すると，関係の合成および逆関係，同値関係，順序関係などが，普通の集合の場合の拡張として極めて自然に定義できることが示された．

ファジィ関係の合成については，最も一般的に用いられる max-min 合成のほかに，min-max 合成，max-product 合成，min-min 合成，max-max 合成などさまざまな定義が提案されている（[8][14][24]．[14] は sup-min 合成などと呼ぶ）．その中で max-min 合成が，本稿の自然な解釈では普通の集合の場合とまったく同じ意味を持つことが明らかになった．なお，本稿では合成の順序は，ファジィ関連の文献の多くとは逆の順で，写像の合成と同じ順になっている．

ファジィ順序関係に関しては，普通の順序（半順序）は通常の定義と本稿の定義が一致するが，全順序（線形順序）は比較可能性についてのザデー以来の通常の定義が本稿の定義よりも弱いことが示された．

本稿の H ファジィ関係の所属関数は，一般の半順序集合 L に対する L ファジィ関係 ([8]) の特別な場合に当たる．写像は関係の特別な場合であるから，ファジィ写像についても，直観主義的集合論のモデルでまったく同様に自然な解釈が成り立つことが分かる．ファジィ写像やファジィ関係によるファジィ集合の像や逆像についても，自然に考えることができる．

ファジィ関係の概念は，ファジィ推論，ファジィシステムなどの応用に結び付く理論において重要な役割を果たしており，本稿の自然な解釈が新たな可能性をもたらすことが期待される．

参考文献

[1] 石渕久生・乾口雅弘, 各種ファジィ集合, [9] 第 6 章, 227–292, 1992.

[2] 本多中二・大里有生, ファジィ工学入門, 海文堂出版, 1989.

[3] G. J. Klir and T. A. Folger, 本多中二訳, ファジィ情報学, 日刊工業新聞社, 1993.（原題: *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall, 1988.）

[4] 小寺平治, ファジィの数学的基礎づけ, 日本ファジィ学会誌, 6(6), 1057–1066, 1994.

[5] H. Kodera, [0,1]-valued sheaf model of an intuitionistic set theory and fuzzy groups, *Bulletin of Aichi Univ. of Education*, 44 (Natural Science) , 9–23, 1995. 愛知教育大学研究報告, 第 44 輯（自然科学）

[6] 小寺平治, 入門＝ファジィ数学, 遊星社, 1995.

[7] 小野寛晰, 関係の代数, シリーズ 新しい応用の数学 6 , 教育出版, 1974.

[8] 水本雅晴, ファジイ理論とその応用, Information & Computing 19, サイエンス社, 1988.

[9] 水本雅晴編著, ファジィ集合, 講座ファジィ 第 2 巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[10] 向殿政男, ファジィ論理, 講座ファジィ 第 4 巻, 日刊工業新聞社, 1993.

[11] 中島信之, ファジィ集合, [9] 第 1 章, 1–64, 1992.

[12] 日本数学会編, 岩波数学辞典 第 3 版, 岩波書店, 1985.

[13] 西田俊夫・竹田英二, ファジィ集合とその応用, 数学ライブラリー48, 森北出版, 1978.

[14] 大里有生, ファジィ関係, [9] 第 2 章, 65–133, 1992.

[15] 坂和正敏, ファジィ理論の基礎と応用, 森北出版, 1989.

[16] M. Shimoda, Categorical aspects of Heyting-valued models for intuitionistic set theory, *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli*, 30(1), 17–35, 1981.

[17] 下田守, ファジィ集合の自然な解釈, 下関市立大学論集, 40(1-2), 309–320, 1996.

[18] 竹内外史, 直観主義的集合論, 紀伊國屋数学叢書 20, 紀伊國屋書店, 1980.

[19] G. Takeuti and S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, *J. Symbolic Logic*, 49(3), 851–866, 1984.

[20] G. Takeuti and S. Titani, Fuzzy logic and fuzzy set theory, *Arch. Math. Logic*, 32, 1–32, 1992.

[21] 田中英夫, ファジィモデリングとその応用, システム制御情報ライブラリー 2 , 朝倉書店, 1990.

[22] 千谷慧子, ファジィの数学的基礎, 講座ファジィ 第 1 巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[23] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8(3), 338–353, 1965.

[24] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, *Information Sciences*, 3(2), 177–200, 1971.

前稿の訂正

前稿 [17] には錯誤または印刷上の見落としによるいくつかの誤記があるので，主な訂正部分を以下に示す．なお，この訂正は本論の流れにはまったく影響しない．

1．312 頁　定義 1.5(1) の定義を次のように変更する．

(1) $\mathcal{D}\{u,v\}^H = \{u,v\}$, $E\{u,v\}^H = Eu \wedge Ev$,
$\{u,v\}^H(x) = Eu \wedge Ev \quad (\forall x \in \{u,v\})$.

2．同頁　定義 1.5 の直後の文を次のように変更する．

上で定義された対・順序対・和集合は外延的である．

3．同頁　命題 1.2(1) の式を次のように変更する．

(1) $\|x \in \{u,v\}^H\| = (\|x = u\| \vee \|x = v\|) \wedge Eu \wedge Ev$.

4．313 頁　定義 1.6(1) の 1 行目を削除して次のように変更する．

(1) $\mathcal{D}(u \cup v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v$, $E(u \cup v) = Eu \vee Ev$,
$(u \cup v)(x) = \|x \in u\| \vee \|x \in v\| \quad (\forall x \in \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v)$.

5．同頁　命題 1.3(3) の 2 行目を次のように変更する．

$u \backslash v \sqsubseteq u$ かつ $(u \backslash v) \cap v \sim \phi$.

6．314 頁　定義 2.1(2) の 2 行目を途中から次のように変更する．

A が X の H ファジィ部分集合 $\Longleftrightarrow A \in V^H$ かつ $A \sqsubseteq \check{X}$.

7．同頁　最後の 2 行の式を次のように変える．

$$\mu_A(x) = \|\check{x} \in A\| = \bigvee_{u \in \mathcal{D}A} (A(u) \wedge \|\check{x} = u\|)$$
$$= \bigvee_{y \in X} (A(\check{y}) \wedge \|\check{x} = \check{y}\|) = A(\check{x}) = \mu(x).$$