位相空間の公理について

下　田　　守

0．序

一般に集合に位相を導入するには種々の方法が考えられる．最近は，開集合や近傍系を基本概念として位相を導入する場合が多いようであるが，閉集合，閉包，収束等の他の基本概念から出発することも可能である．例えば，開集合を基本概念とする場合，集合の部分集合の族（部分集合の集合）で，一定の条件（開集合の公理と呼ばれる）をみたすものを開集合族として，他の諸概念を開集合族から定義して行くのである．どの概念を基本概念として選んでも全く同等の構造が生ずる．この位相構造が導入された集合を位相空間という．本稿では，いくつかの基本概念に関する公理を紹介し，相互の関係について考察する．特に，外部の公理と導集合の公理を中心に扱う．さらに，導集合によって T_1 位相空間の公理を簡単な形で書けることを示す．

以下，X をある（固定された）集合とする．x，y 等は X の要素を表し，A，B，O，F，U，V，W 等は X の部分集合を表すものとする．X のべき集合（部分集合全体の集合）を $\boldsymbol{P}(X)$ と書く．$\mathfrak{O}$，$\mathfrak{F}$，$\mathfrak{U}(X)$ 等は部分集合の族，すなわち $\boldsymbol{P}(X)$ の部分集合を表すものとする．A の（X に対する）補集合を A^c で表す．他の諸記号は通例に従って用いる．（多くは文献[1]に従った．）

1. 公理と関係

まず，いくつかの基本概念に関する公理を列挙する.

(O) 開集合の公理

Xの部分集合の族$\mathfrak{O}\subseteq \boldsymbol{P}(X)$が次の三条件をみたすとき，$\mathfrak{O}$の元を$X$の開集合という.

1） $X\in\mathfrak{O}$，$\phi\in\mathfrak{O}$.

2） O_1，$O_2\in\mathfrak{O} \Rightarrow O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}$.

3） $\forall\lambda\in\Lambda(O_\lambda\in\mathfrak{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathfrak{O}$.

(F) 閉集合の公理

$\mathfrak{F}\subseteq\boldsymbol{P}(X)$が次の三条件をみたすとき，$\mathfrak{F}$の元を$X$の閉集合という.

1） $\phi\in\mathfrak{F}$，$X\in\mathfrak{F}$.

2） F_1，$F_2\in\mathfrak{F} \Rightarrow F_1\cup F_2\in\mathfrak{F}$.

3） $\forall\lambda\in A(F_\lambda\in\mathfrak{F}) \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\in\mathfrak{F}$.

(U) 近傍系の公理

Xの各点xに対し$\mathfrak{U}(x)\subseteq\boldsymbol{P}(X)$が対応して，次の四条件をみたすとき，$\mathfrak{U}(x)$を点$x$の近傍系と呼び，$\mathfrak{U}(x)$の元を$x$の近傍という.

1） $U\in\mathfrak{U}(x) \Rightarrow x\in U$.

2） U_1，$U_2\in\mathfrak{U}(x) \Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathfrak{U}(x)$.

3） $U\in\mathfrak{U}(x)$，$U\subseteq V \Rightarrow V\in\mathfrak{U}(x)$.

4） $U\in\mathfrak{U}(x) \Rightarrow \exists W\in\mathfrak{U}(x)\,[W\subseteq U\wedge\forall y\in W\,(U\in\mathfrak{U}(y))]$.

(I) 開核の公理

各部分集合$A\subseteq X$に対し集合$A^i\subseteq X$が対応して，次の四条件をみたすとき，A^iをAの開核（または内部）といい，A^iの元をAの内点という.

1) $X^i = X$.

2) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$.

3) $A^i \subseteq A$.

4) $A^i \subseteq A^{ii}$.

(**A**) 閉包の公理

各部分集合 A に対し $A^a \subseteq X$ が対応して，次の四条件をみたすとき，A^a を A の閉包（または触集合）という．

1) $\phi^a = \phi$.

2) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$.

3) $A \subseteq A^a$.

4) $A^{aa} \subseteq A^a$.

(**E**) 外部の公理

各 $A \subseteq X$ に対し $A^e \subseteq X$ が対応して，次の四条件をみたすとき，A^e を A の外部という．

1) $\phi^e = X$.

2) $(A \cup B)^e = A^e \cap B^e$.

3) $A \cap A^e = \phi$.

4) $A^{ece} = A^e$.

(**D**) 導集合の公理

各 $A \subseteq X$ に対し $A^d \subseteq X$ が対応して，次の四条件をみたすとき，A^d を A の導集合といい，A^d の元を A の集積点という．

1) $\phi^d = \phi$.

2) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3) $A^{dd} \subseteq A \cup A^d$.

4) $\forall x \in X \ (x \notin \{x\}^d)$.

部分集合の間の包含順序に関して，開集合と閉集合は双対の関係にあり，開核作用素と閉包作用素も双対の関係にある．外部や導集合等に関しても双対の関係にある概念を考えてその公理を与えることができるが，詳細は省略する．

次に上記の諸概念の相互の関係を考える．以下に示す諸関係によって，一つの概念から他の諸概念を定義して決定することができる．

(OF)　$F\in\mathfrak{F} \Leftrightarrow F^c\in\mathfrak{O}$.

(FO)　$O\in\mathfrak{O} \Leftrightarrow O^c\in\mathfrak{F}$.

(OU)　$U\in\mathfrak{U}(x) \Leftrightarrow \exists O\in\mathfrak{O}\ (x\in O\subseteq U)$.

(UO)　$O\in\mathfrak{O} \Leftrightarrow \forall x\in O\ (O\in\mathfrak{U}(x))$.

(OI)　$A^i = \bigcup\{O;\ O\in\mathfrak{O}\wedge O\subseteq A\}$.

(IO)　$O\in\mathfrak{O} \Leftrightarrow O^i=O$.

(FA)　$A^a = \bigcap\ \{F;\ F\in\mathfrak{F}\wedge A\subseteq F\}$.

(AF)　$F\in\mathfrak{F} \Leftrightarrow F^a=F$.

(UI)　$x\in A^i \Leftrightarrow \exists U\in\mathfrak{U}(x)\ (x\in U\subseteq A)$.

(IU)　$U\in\mathfrak{U}(x) \Leftrightarrow x\in U^i$.

(IA)　$A^a=A^{cic}$.

(AI)　$A^i=A^{cac}$.

(IE)　$A^e=A^{ci}$.

(EI)　$A^i=A^{ce}$.

(AE)　$A^e=A^{ac}$.

(EA)　$A^a=A^{ec}$.

(AD)　$x\in A^d \Leftrightarrow x\in(A-\{x\})^a$.

(DA)　$A^a=A\cup A^d$.

例えば，開集合を基本概念とする場合，公理(**O**)をみたす開集合族 $\mathfrak{O}$ から出発して，関係(**OF**)によって閉集合族 $\mathfrak{F}$ を定義すると，$\mathfrak{F}$ は公理(**F**)をみたすことが証明される．さらに，この $\mathfrak{F}$ に対して，関係(**FO**)によって定められる集合の全体を $\mathfrak{O}'$ とすると(すなわち，$\mathfrak{O}'=\{O; O^c\in\mathfrak{F}\}$)，$\mathfrak{O}'$ は元の開集合族 $\mathfrak{O}$ と完全に一致する．(これは，(**OF**)と(**FO**)が同値であることから，直ちに導かれる．) 逆に，閉集合族から出発して開集合族を定義する場合にも，全く同様のことがいえる．よって，開集合の公理(**O**)と閉集合の公理(**F**)は，(関係(**OF**)および(**FO**)を媒介にして) 全く同等のものと考えてよい．同様の事情が他の概念の間でも成り立つことがいえる．

集合に，これらの一つの概念，したがって残りのすべての概念が導入されたとき，この全体の構造を位相(構造)といい，位相が導入された集合を位相空間という．実用上は例えば開集合族を位相ということもある．

以上の中で，開集合，閉集合，近傍系，開核，閉包等の公理及びそれらの相互の関係については周知の事であるので詳細は省略する．しかし，外部及び導集合の公理については，最近の文献には記載例が見当らないので，やや詳しく概説することにする．[1)]

2．外部の公理

補題1． (**IE**) $\Leftrightarrow$ (**EI**).

証明) (**IE**)の式の A に A^c を代入すれば，$A^{ce}=A^{cci}=A^i$ となって，(**EI**)を得る．逆も同様．

命題1． (**I**)，(**IE**) $\Rightarrow$ (**E**).

証明）　(I) と (IE) を仮定する．すなわち，X の各部分集合 A に対し $A^i \subseteq X$ が定義されて (I) をみたし，(IE) によって，A^e が定義されているとする．公理 (E) がみたされることを示す．

(E 1)：　(I 1) より，$\phi^e = \phi^{ci} = X^i = X$.

(E 2)：　(I 2) より，$(A \cup B)^e = (A \cup B)^{ci} = (A^c \cap B^c)^i = A^{ci} \cap B^{ci}$
$= A^e \cap B^e$.

(E 3)：　(I 3) より，$A^e = A^{ci} \subseteq A^c$．よって，$A \cap A^e = \phi$.

(E 4)：　(I 3)，(I 4) より，一般に，$A^{ii} = A^i$ が成り立つ．よって，
$A^{ece} = A^{cicci} = A^{cii} = A^{ci} = A^e$.

命題 1 において，さらにこの A^e から (EI) によって定義される部分集合 A^{ce} が元の開核 A^i と一致することは，補題 1 より明らかである．

命題 2．(E)，(EI) $\Rightarrow$ (I).

証明）　命題 1 と全く同様．

外部の公理 (E) と閉包の公理 (A) との間の関係についても，同様の命題が成り立つ．よって，公理 (I)，公理 (A)，公理 (E) は互いに同等である．

3．導集合の公理

補題 1．(A) の下で，次の (1)，(2) が成り立つ．

(1)　$A \subseteq B \Rightarrow A^a \subseteq B^a$.

(2)　$A^{aa} = A^a$.

証明）

(1) は (A 2) より，(2) は (A 3) と (A 4) より，直ちに導かれる．

補題 2．(A)，(AD) $\Rightarrow$ (DA).

すなわち，(**A**)の下で，

$A^d=\{x;\ x\in(A-\{x\})^a\}$ と定義すると，$A^a=A\cup A^d$ が成り立つ．

証明)

(i)　$A\cup A^d\subseteq A^a$：

$x\in A\cup A^d$ とする．$x\in A$ ならば(**A** 3)より $x\in A^a$．$x\in A^d$ ならば，(**AD**) によって，$x\in(A-\{x\})^a$．そこで補題 1 の(1) より，$x\in A^a$ となる．

(ii)　$A^a\subseteq A\cup A^d$：

$x\in A^a$ で $x\notin A$ とする．$A-\{x\}=A$ だから，$x\in(A-\{x\})^a$．そこで (**AD**) より，$x\in A^d$．

命題 1．(**A**)，(**AD**) $\Rightarrow$ (**D**)．

証明) (**A**) と(**AD**) を仮定する．すなわち，各 $A\subseteq X$ に対し $A^a\subseteq X$ が定義されて (**A**) をみたし，(**AD**) によって，A^d が定義されるとする．(**D**) がみたされることを示す．

(**D** 1)：$x\in\phi^d$ と仮定すると，$x\in(\phi-\{x\})^a$ となり，(**A** 1) より $(\phi-\{x\})^a=\phi^a=\phi$ だから，矛盾．よって，$\phi^d=\phi$．

(**D** 2)：(**A** 2) より，

$$
\begin{aligned}
& x\in(A\cup B)^d\\
\Leftrightarrow\ & x\in((A\cup B)-\{x\})^a=((A-\{x\})\cup(B-\{x\}))^a\\
& \qquad=(A-\{x\})^a\cup(B-\{x\})^a\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A-\{x\})^a \text{ または } x\in(B-\{x\})^a\\
\Leftrightarrow\ & x\in A^d \text{ または } x\in B^d\\
\Leftrightarrow\ & x\in A^d\cup B^d.
\end{aligned}
$$

よって，$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$．

(**D** 3)：補題 2 より，$A^a=A\cup A^d$．よって，(**D** 2)を用いて，

$A^{aa}=(A\cup A^d)^a=A\cup A^d\cup(A\cup A^d)^d=A\cup A^d\cup A^{dd}$.

補題 1 の(2) より，$A^{aa}=A^a$ だから，$A\cup A^d\cup A^{dd}=A\cup A^d$．

したがって，$A^{dd}\subseteq A\cup A^{d}$.

(D 4)　$x\in\{x\}^{d}$と仮定すると，**(A 1)**より，$x\in(\{x\}-\{x\})^{a}=\phi^{a}$ $=\phi$ となって，矛盾．よって，$x\notin\{x\}^{d}$.

命題 2．**(D)**，**(DA)** $\Rightarrow$ **(A)**

証明）**(D)** と **(DA)** を仮定する．すなわち，各 $A\subseteq X$ に対し $A^{d}\subseteq X$ が定義されて **(D)** をみたし，$A^{a}=A\cup A^{d}$ とする．このとき，**(A)** が成り立つことを示す．

(A 1):　**(D 1)**より，$\phi^{a}=\phi\cup\phi^{d}=\phi\cup\phi=\phi$.

(A 2):　**(D 2)**より，$(A\cup B)^{a}=A\cup B\cup(A\cup B)^{d}$

$=A\cup B\cup A^{d}\cup B^{d}=(A\cup A^{d})\cup(B\cup B^{d})=A^{a}\cup B^{a}$.

(A 3):　**(DA)**より明らかに，$A\subseteq A\cup A^{d}=A^{a}$.

(A 4):　**(D 2)**より，$A^{aa}=A\cup A^{d}\cup(A\cup A^{d})^{d}=A\cup A^{d}\cup A^{dd}$.

(D 3)より，$A^{dd}\subseteq A\cup A^{d}$ だから，$A^{aa}=A\cup A^{d}=A^{a}$．よって，$A^{aa}\subseteq A^{a}$.

補題 3．**(D)**の下で，次が成り立つ．

$$A\subseteq B \Rightarrow A^{d}\subseteq B^{d}.$$

証明）**(D 2)**より，明らか．

補題 4．**(D)**，**(DA)** $\Rightarrow$ **(AD)**.

すなわち，**(D)** の下で，$A^{a}=A\cup A^{d}$ と定義すると，次の関係が成り立つ:

$$x\in A^{d} \Leftrightarrow x\in(A-\{x\})^{a}.$$

証明）

(i)　$x\in A^{d}$ とすると，**(D 2)**より，

$A^{d}=((A-\{x\})\cup\{x\})^{d}=(A-\{x\})^{d}\cup\{x\}^{d}$，よって，**(D 4)**より $x\notin\{x\}^{d}$ だから，$x\in(A-\{x\})^{d}$．$(A-\{x\})^{d}\subset(A-\{x\})^{a}$

だから，$x \in (A-\{x\})^a$.

(ii) $x \in (A-\{x\})^a$ とすると，

$(A-\{x\})^a = (A-\{x\}) \cup (A-\{x\})^d$ で，$x \notin (A-\{x\})$だから，

$x \in (A-\{x\})^d$. 補題 3 より，$(A-\{x\})^d \subseteq A^d$ だから，$x \in A^d$.

以上によって，公理 (**A**) と公理 (**D**) が全く同等であることがわかる.

導集合の公理と他の公理（近傍等）との関係を考えることもできるが省略する.

4. $\mathbf{T}_1$位相空間

第 1 分離公理をみたす位相空間を T_1 位相空間という.[2] 第 1 分離公理の述べ方はいくつかあるが，閉集合及び導集合を用いるとそれぞれ次の形になる.

(**T**) $\forall x \in X\ (\{x\} \in \mathfrak{F})$.

($\mathbf{T}_1$) $\forall x \in X\ (\{x\}^d = \phi)$.

明らかに(**T**)と($\mathbf{T}_1$)は同値である. なぜなら，(**D** 4)より$x \notin \{x\}^d$だから，

$\{x\} \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \{x\}^a = \{x\} \Leftrightarrow \{x\} \cup \{x\}^d = \{x\} \Leftrightarrow \{x\}^d = \phi$.

T_1 空間の公理を導集合で表すには (**D**)と($\mathbf{T}_1$) の計 5 条件を並べればよいが，この中で(**D** 1)と(**D** 4) は不要である. (**D** 2) の下では，補題 3 より，(**D** 1)と (**D** 4)は ($\mathbf{T}_1$) から導き出されるからである. よって，T_1 空間の公理は次の三条件で表すことができる.

(**R**)

1) $\forall x \in X\ (\{x\}^d = \phi)$.

2) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3) $A^{dd} \subseteq A \cup A^d$.

実は上の条件3）はより簡単な形 $A^{dd}\subseteq A^d$ で置き換えることができる．まず，一般の位相空間で次の補題が成り立つ．

補題1．A が閉集合 $\Leftrightarrow$ $A^d\subseteq A$.

証明）Aが閉集合 $\Leftrightarrow A^a=A \Leftrightarrow A\cup A^d=A \Leftrightarrow A^d\subseteq A$.

命題1．T_1空間において，A^dは閉集合．[3)]

証明）(**R**)の下で，$A^{dd}\subseteq A^d$ を示せばよい．

$x\in A^{dd}$ とする．

$A=(A-\{x\})\cup\{x\}$だから，(**R** 1)，(**R** 2)より，

$A^d=(A-\{x\})^d\cup\{x\}^d=(A-\{x\})^d$.

(**R** 3)より，

$A^{dd}=(A-\{x\})^{dd}\subseteq(A-\{x\})\cup(A-\{x\})^d$.

$x\notin A-\{x\}$　だから　$x\in(A-\{x\})^d=A^d$.

よって，$A^{dd}\subseteq A^d$.

したがって，T_1 空間の公理は次の三条件で表すことができる．

(**K**)

1）　$\forall x\in X\ (\{x\}^d=\phi)$.

2）　$(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$.

3）　$A^{dd}\subseteq A^d$.

明らかに(**K** 3)ならば(**R** 3)だから，公理(**R**)と公理(**K**)は同値である．したがって，導集合による T_1 空間の公理としては，公理(**K**)を採用すればよい．

註

1） 導集合の公理は（少し違った形で）［３］，［６］等に記載がある．

2） 第１分離公理を Frèchet の公理ともいう．T_1位相空間を Kuratowski 空間ともいう．

3） ［２］，例題16．１（p.128）．

文献

［１］ 岩波数学辞典 第２版，1968，岩波書店．

［２］ 河田敬義・三村征雄，現代数学概説Ⅱ，1965，岩波書店．

［３］ 小松醇郎，位相空間論，1947，岩波書店．

［４］ 柴田敏男，集合と位相空間，1972，共立出版．

［５］ 竹之内脩，トポロジー，1962，廣川書店．

［６］ 中山正，集合・位相・代数系，1949，至文堂．