正５角形の作図を取り入れた三角関数の授業
－興味を持って理解を深める授業実践－

岩本　敏彦*

Regular Pentagon－Sharing A Method of Teaching Trigonometric Functions

Toshihiko IWAMOTO*

Abstract

According to our syllabus, first-year students will learn trigonometric ratios and functions. Of those contents, addition formulae and their application are difficult for the students to learn because there seem too many formulae to memorize. What should we do to get them more interested so that they can have a deeper understanding? One of the answers I've come up with is a lesson where they work on constructing a regular pentagon.In order to put it into practice, the first thing to do is to look over the academic literature on the construction by rulers and compasses. Then, I'll consider how to make a good use of it. Since there are various ways to make a regular pentagon, I've studied which way is likely to become the most proper in our classrooms. Furthermore, I've checked some materials on mathematics history which make the students feel more intrigued and realize the significance of the study. And I'll conclude by referring to how my classes go as an example.

Key words: trigonometric function, the construction by rulers and compasses, regular pentagon, mathematics history

１．はじめに

本校では１年生で三角比と三角関数を指導している。中でも最後の加法定理とその応用の内容は学生にとっては２倍角、半角、和積等たくさんの公式が出て習得が難しいところである([7]，[8])。 そこでそれらの諸公式を活用することの意義を理解させ、興味を持たせるための教材として正５角形の作図を取り入れた授業を考えた。正５角形をコンパスと定規で作図する方法は中学生の初等幾何を用いてもできるが、三角関数の加法定理を習得した後ならばcos36°の値を求めることから作図できる。学生にとって今学習している内容が具体的に活用される場面を見ることで実用価値が実感でき、作図の作業を伴うことで学生の興味関心を引くことで、この題材が三角関数の指導に適切であると考えた。さらに正５角形の作図を題材に他の正多角形の作図についても授業の中に取り入れることで、普段の授業であまり触れることのない数学の歴史について紹介し、数学を学ぶことの楽しみがより深まると考える。本論文では授業に適切に導入するための方法について考察し、授業実践の内容について報告した。

２．定規とコンパスによる作図の歴史

２．１　なぜ定規とコンパスか

「完全な幾何学的図形とは直線と円だけ」というプラトンの言葉があり([3])、「古代ギリシャの美意識から幾何学的作図は定規とコンパスだけというプラトンの束縛による本質的でない制限が付けられた」

---

*一般科目

2011年9月28日受付

という記述があるが([1])、筆者の解釈では大きな図形を描くときに小さな分度器は役に立たないので、定規とコンパスでの作図が実用的であると考える。例えばグランドにサッカーコートを描くときに正確な垂直を測るためには分度器を使うのではなくロープと杭を使って３：４：５の直角３角形の作図や垂直２等分の作図を使うのが最も正確で簡単であると考える。長い直線や大きな円を描くことはロープと杭さえあれば簡単にできるが分度器で例えば２５°の大きな角を正確に描くことは困難である。このように審美的な面から定規とコンパスという制限での作図を考えたのではなく実用的な面からの要請での制限であったと筆者は考える。

2．2　3大作図問題

作図問題ではもっとも有名なものである。

①立方体倍積問題（デロス問題）

与えられた立方体の２倍の体積を持つ立方体を作図すること

②円積問題

与えられた円と面積の等しい正方形を作図すること

③角の３等分問題

任意に与えられた角を３等分すること

①と③については1837年にP.L.Wantzelにより不可能であることが証明された。　②については、1882年に、C.L.F.Lindemannによりπが超越数であることが証明され、不可能であることが示された（[3]，[5])。

2．3　正多角形の作図

正３角形、正方形、正５角形、正１５角形およびこれらの頂点の数を倍々していった数の頂点を持つ正多角形が作図可能である事はユークリッドの「原論」に記されており、よく知られていた。長い間それ以上のことは判明しなかったが、ガウスが1796年3月30日に、正１７角形が作図可能であることを発見した。ガウスのエピソードは高木（[6]）に正十七角形のセンセーションという題で「1796年3月30日の朝、十九歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いた」という文章で始まるとても興味を引く内容である。ガウスはさらに1801年に出版した『整数論の研究』において、正 n角形が作図可能であるための必要十分条件を述べその十分性を証明した([3],[6])。

2．4　数学史の授業への活用方法

塚原([9])は数学史の活用について次のように述べている。「数学の歴史は、人間がどのように問題を把握し、どのように問題解決し、どのような新たな問題を提示していくのかを顕著に物語っており、問題解決における人間の知的精神活動のパノラマであると言えよう。この意味において数学史は、数学学習に人間の知的精神活動のありさまを組み込み、授業において数学をつくりあげていくという数学的活動の場面を提供するものといえる。」このように数学史の活用は学習者にとっては興味関心意欲を高めることに重要な役割を果たすことができる可能性があるが、学習者のレベルに合った適切な教材として効果的に授業実践することはなかなか困難であると思われる。今回の教材化で考えたポイントは次の３つである。

①　学習内容の理解を深める題材であること

現在学習していることを使ってその実用性が実感できるような活用方法を考えた。

②　興味・関心を高める題材であること

さまざまな難問にチャレンジしてきた数学者を紹介して、偉大な成果を鑑賞することで興味を引かせることができる。

③　授業進度を妨げない適切な題材であること

あまりに数学史の内容に深入りすると、授業から極端に離れ時間を取り過ぎ本来の内容の習熟の妨げとなる。そのために内容を取捨選択する必要がある。

３. 正5角形の作図の授業への導入方法

通常の正５角形の作図方法は、三角形の相似を使って１辺の長さを２とした場合に対角線が$1+\sqrt{5}$となることから作図するのであるが、この方法では三角関数を応用した教材にならない。また図１の∠ACD が 72°となることから cos72° の値を求めて図のＡＣの長さを求める方法は回りくどく、１回の授業の中で説明するには理解しにくい学生が多いと思われる。三角関数の応用の観点からと、解りやすさから円周を５等分する作図方法を選択することにした。そこで二つの方法について検討した。

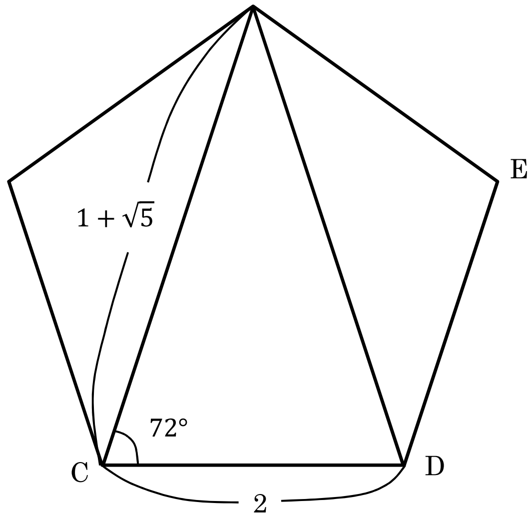

図１

① cos72°　の値を求めて作図に利用する。
$\cos 72° = (\sqrt{5}-1)/4$ を求めて点Ｐを作図で求める。しかしながらこの作図方法は求める長さが短いため誤差が大きくなると考えられる。（図２）

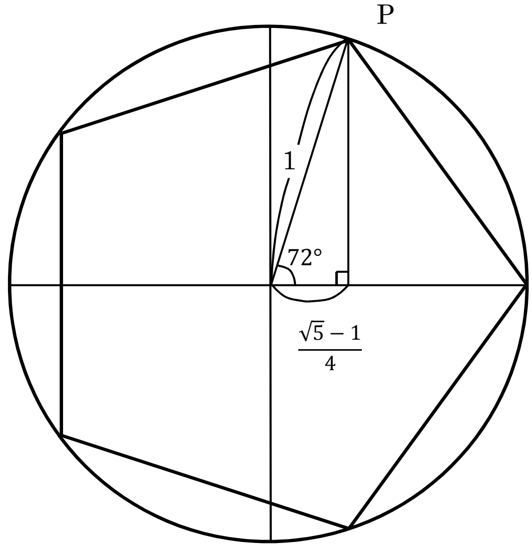

図２

② cos36°　の値を求めて作図に利用する。
①の場合を少し回転させただけであるが、今度は$\cos 36° = (\sqrt{5}+1)/4$ を求めて図３の点Ｑを作図で求める。今度はアの場合の値に比べて長くなるため誤差が少ないと考えられる。以上のことから授業ではこの②の方法で実施することにした。

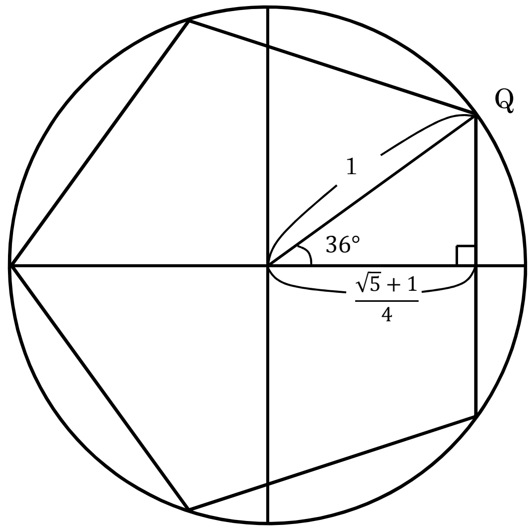

図３

４. 授業実践

４. １ 授業時間　２時限連続１００分

４. ２ 実施対象　本校１年生

４. ３ 指導計画　加法定理　（２時間）
２倍角の公式，半角公式　（２時間）
加法定理の応用　（本時）

４. ４ 指導目標

① 加法定理等の三角関数の基本的な計算を習熟させる。
② 三角関数と正５角形の作図を関連付けて学習内容の実用価値を実感する。
③ 正多角形の作図についての歴史を知り数学についての興味・関心を深める。
④ 作図方法を自ら発見することで学習の達成感を味わう。

４．５ 実際の授業の流れ

① 加法定理の復習

② ３倍角の公式を求めさせる。

・$\sin 3\alpha$は$\sin\alpha$だけを使って$\cos 3\alpha$は$\cos\alpha$だけを使って求めるように指示する。

・しばらくして$\sin(2\alpha+\alpha)$について加法定理を利用することでできることを伝えて求めさせる。

③ この公式を使ってコンパスと定規で正５角形が作図できることを伝える。

・ここではまだ具体的な方法は説明せず、今求めた３倍角の公式が正５角形の作図に利用できるということだけを伝えて学生の興味を引く。

④ 定規とコンパスによる作図の歴史の紹介

・３大作図問題を紹介し、３つとも定規とコンパスでは作図が不可能ということが１９世紀になってようやく証明されたことを伝える。

・定規とコンパスでの作図の意義について説明する。グランドでのサッカー場を作る話、大きな図形を描くことに有用であることについて筆者の経験を交えて話をする。

⑤ 黒板に下の空欄の表を書き正３角形から正２０角形までで作図できそうなものを直感で書かせ答えさせる。

正ｎ角形	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
○×	○	○	○	○	×	○	×	○	×	○	×	×	○	○	○	×	×	○

・ここで正５角形が作図できれば正１０角形が作図できることを説明する。

・３、４、５、６角形はできそうだから８、１０、１２、１６、２０角形はでき、１５角形は３角形と５角形を組み合せばできることを説明する。

・ここで正１７角形以外の作図可能なものはギリシャ時代にすでに知られていたことを説明する。不可能と思われていた正１７角形は１７９６年に１９歳のガウスが見つけたことを紹介し興味を持たせる。正１７角形についてのガウスのエピソードを([6])の文章を引用して紹介する。

・ガウスは１９歳で正１７角形の作図方法を見つけたわけだが正５角形についてはどのようにすれば作図できるのかと問いかけて正５角形の作図問題に帰る。

⑥ $\cos 36°$の値の長さが作図できれば正５角形が作図できることを図３を板書して説明する。

⑦ $\cos 36°$の値を求めさせる。

・$\alpha=36°$のとき $\sin 2\alpha=\sin(180°-3\alpha)=\sin 3\alpha$であることを利用すると２倍角と３倍角の公式を使って$\cos 36°$の値が求まることを伝えて$\cos 36°=(\sqrt{5}+1)/4$　を求めさせる。

・$\cos 36°$の求め方を説明する。

$2\sin\alpha\cos\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$より$2\cos\alpha=3-4\sin^2\alpha$　よって$4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$　これより
$\cos\alpha=(\sqrt{5}+1)/4$　となる。

⑧ $\sqrt{5}$の作図方法を考えさせる。

・１の長さを決めると$\sqrt{2}$や$\sqrt{3}$の長さは３平方の定理から直角三角形を作図して求められることを説明する。

・$\sqrt{5}$の作図方法を答えさせ，図を板書する。

・さらに図４を示して、$\sqrt{n}$が作図できると$\sqrt{n+1}$も作図できることを付け加えて、$\sqrt{\ }$のさまざまな値は作図できそうだということを認識させる。

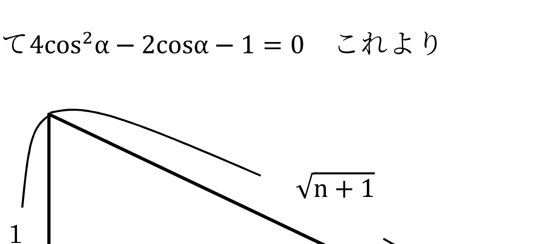

図4

⑨ 正５角形の作図方法を考えさせる。

・まず半径２の円から始めることにする。半径を２にすると図３の$(\sqrt{5}+1)/4$が$(\sqrt{5}+1)/2$となり４等分が２等分だけででき、簡易化でき誤差も少なくなることを伝える。

・以上を説明して学生に考えさせて作図させる。

⑩　数人に指名して黒板で実際に作図してもらう。
- 異なる作図方法の学生を選んで、実際に黒板で授業用の大きなコンパスを利用して作図をしてもらう。

⑪　正５角形の作図方法をおさらいして､ガウスが見つけた正 17 角形の作図について大雑把に説明する.
- $\cos 36°$の値を求めて作図できたように、$\cos(2\pi/17)$の値が次のようになることをガウスは求めたと説明して次の式を板書する。

$$\cos(2\pi/17)=\frac{1}{16}\left\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right\}$$

- $\sqrt{\ }$と整数の四則演算で表された数は、定規とコンパスで作図できることを説明する。
- 図５を板書し、aの値が作図できればこの図を利用して$\sqrt{a}$が作図できるので上の$\cos(2\pi/17)$の値は、がんばれば何とか作図できることを説明する。

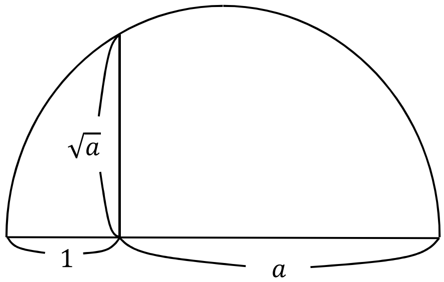

図５

⑫　正ｎ角形が定規とコンパスで作図できる条件を紹介する。

[定理](ガウス)　　正ｎ角形が定規とコンパスで作図可能であるための必要十分条件は $\mathrm{n}=2^r p_1 p_2 \cdots p_s$と表されることである。ここでｒとｓは負でない整数、$p_i=2^{2^{r_i}}+1$（r_iは負でない整数）という形の奇素数である。

- 正ｐ角形が作図可能であるような素数ｐ＜10^{40000}は、3,5,17,257,65537 だけであり正 257 角形の作図法については論文発表されているが、正 65537 角形についてはまだ発表されていないということを紹介する。

⑬　本時のまとめ
- ３倍角の公式を利用して$\cos 36°$の値が求められた。
- $\cos 36°=(\sqrt{5}+1)/4$を利用して正５角形を定規とコンパスで作図することができた。
- ガウスは 2000 年間不可能と思われていた正１７角形の作図方法を見つけた。
- さらに正ｎ角形が定規とコンパスで作図できる条件も求めた。

５. 実施状況

加法定理についてはまだまだ覚えていない（覚えようとしてさえいない）学生もいたが、習得の度合いは良いようであった。３倍角公式については時間がかかり、ヒントを与えながらも時間内にできた学生は数人であった。$\cos 3\alpha$については結果だけにしたクラスもあった。正５角形の作図についてはほとんどの学生は知らなかった。正１７角形についてのガウスのエピソードについては興味を持って聞いてくれた。$\cos 36°$の値はほとんど誘導して解かせたので、半数の学生は求められていた。作図という作業は自分が作り出していく作業であり、うまく５分割できた時の学生の喜びを感じることができた。作図したものをレポートで提出させたものを調べると、授業の中でヒントを与え過ぎ、決まったレールの上を進ませたようになった結果同じような内容のものが多かった。以下学生の作図の１例を示す（図６）。

① 垂直に交わる２直線を引く
② 交点Ｏから２の長さの円を描く
③ ＡＢの長さが$\sqrt{5}$となる
④ ＡＢ＝ＯＣとなる点Ｃを取る
⑤ ＡＣの中点Ｄをとる
⑥ ＡＤ＝ＯＥとなる点Ｅをとる

⑦ 点Ｅにおける垂線をと円周の交点Ｑ、Ｒを求める
⑧ 弧ＱＲで円周を５等分する

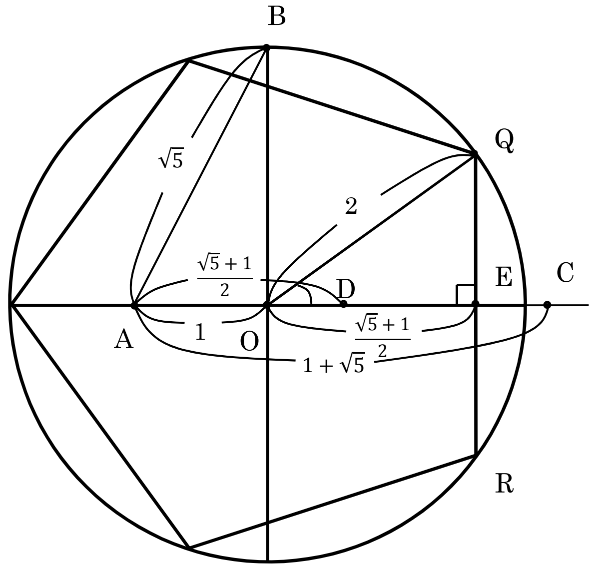

図 6

６. 研究のまとめ

・作図という活動を入れることでいつもよりいきいきと授業に取り組む姿が見られた。
・数学史を活用することで授業に対する興味関心を高めることができた。
・三角関数と正５角形の作図を結びつけることで学んでいる教材の実用価値を実感することができた。
・作図方法を自ら発見することで学習の達成感を味わうことができた。
・授業時間が制限されているため、ヒントを与え過ぎたことでほとんどの学生が同じような作図をしていた。もう少し自ら考えていく範囲を増やすべきであったと考える。

参考文献

[1]足立恒雄　「類体論へ至る道」、　日本評論社、 2010
[2]上野健爾　「数学の視点」、　東京図書、 2010
[3]I.スチュワート　「ガロア理論」、　共立出版、 1980
[4]須藤誠明　「三角比の指導における数学史の活用」､数学教育論文発表会論文集 41、375-380、2008
[5]瀬山士郎　「不可能を証明する」、　青土社、2010
[6]高木貞治　「近世数学史談」、　共立出版、 1979
[7]高遠節夫　他　「新訂　基礎数学」、　大日本図書、 2008
[8]田代嘉宏　他　「新編　高専の数学１」、　森北出版株式会社、2010
[9]塚原久美子「数学学習において数学を"ヒューマナイズ"するための数学史の活用と方法論(数学史と教育数学教育-理論と実践のはざまから)」、東京理科大学理学専攻科雑誌 44(2)、66-84、 2002
[10]福井誠一、　上野山好美、　「二次方程式を定規とコンパスで解く」、和歌山大学教育学部教育実践研究指導センター紀要 3、 23-30、 1994