中等教育における平面幾何の教育方法の考察

堤　康嘉*

Consideration of a teaching method of plane geometry in secondary education

Yasuyoshi TSUTSUMI

Abstract

In the paper, we think about a method for students to have you be interested in plane geometry.

Key words: Plane geometry

1. はじめに

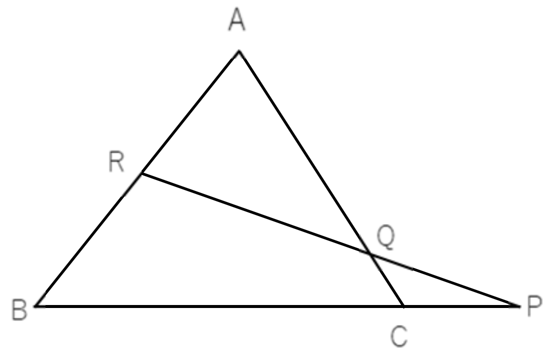
1994 年 4 月から完全実施された高等学校における学習指導要領［2］から，数学 A において平面幾何が再び加わることになった。同じ時期に中学校の学習指導要領［1］も改訂され図形の一部分の学習内容が数学 A に加わることになった。2022 年 4 月から完全実施される新学習指導要領［3］でも継続して平面幾何の学習内容は含まれている。高等学校が数学 A で図形分野を選択したなら，1 年時に学習する三角比を含めると図形の学習は 1994 年の学習指導要領改訂から厚みを増してきている。

平面幾何教育の再導入時の指導要領の解説では，図形の性質を理解し，論理的な考え方を身につけ，なおかつ，図形のもっている美しさを実感し味わうことで数学に興味を増大させる，などと書かれている。これらの事柄がどこまで達成できているかは，本報告では述べないが，平面幾何をどのようにすればより魅力ある授業として生徒・学生達に伝えられるかをいくつかの具体例を通して考察していきたい。

2. 具体例からの考察（1）

大島商船高等専門学校では，学習指導要領に準拠した教科書は使用していないが，そのつど平面幾何の知識を補うなど，様々な視点から指導をしている。最初に次の例題をどのように授業で解説するかを考察する。

例題 1　三角形 ABC の辺 BC を $4:1$ に外分する点を P とし，辺 AB を $3:2$ に内分する点を R とし，線分 AC と線分 PR の交点を Q とする。このとき，$AQ:QC$ を求めなさい。



解説 1

メネラウスの定理を用いる。

メネラウスの定理

ある直線が三角形 ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長と，それぞれ点 P, Q, R で交わるとき（図 1）

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。

＊1　一般科目

2020 年 9 月 29 日

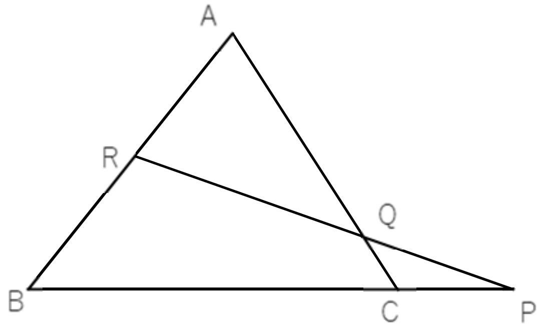


図 1

$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{4}{1}=4, \dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{2}$ とこの定理より，

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1 \Rightarrow 4.\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{3}{2}=1 \Rightarrow \dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{1}{6}$

となる。したがって， $AQ:QC=6:1$ になる。

解説 2

平面ベクトルの性質を用いる。

> $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が平行でないとき，
>
> $$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \Leftrightarrow m=m', n=n'$$
>
> が成り立つ。

$AQ:QC=t:(1-t), RQ:QP=s:(1-s)$ とする。

ベクトル $\overrightarrow{BQ}$ は 2 通りに表すことができる。

$$\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BC}+(1-t)\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}t\overrightarrow{BP}+(1-t)\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BQ}=s\overrightarrow{BP}+(1-s)\overrightarrow{BR}=s\overrightarrow{BP}+\frac{2}{5}(1-s)\overrightarrow{BA}$$

平面ベクトルの性質より，

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}t=s \\ 1-t=\dfrac{2}{5}(1-s) \end{cases} \quad t=\frac{6}{7}, s=\frac{9}{14}$$

となる。したがって， $AQ:QC=6:1$ になる。

解説 3

補助線を引いて求めていく。

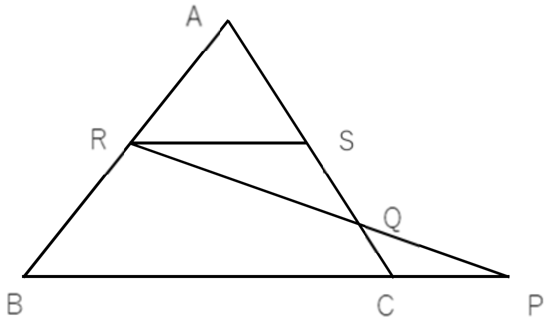


図 2

点 R を通り， 直線 BP に平行な直線と辺 AC との交点を S とする（図 2)。 三角形 ARS と三角形 ABC は相似より, $AR:AB=RS:BC=3:5$ となる。$RS=3a$ とすると， $BC:CP=3:1$ より，$PC=\dfrac{5}{3}a$ となる。三角形 RSQ と三角形 PCQ は相似より, $RS:PC=SQ:CQ=9:5$ となる。$SQ=9b$ とすると， $AR:RS=AS:SC=3:2$ より， $AS=21b$ となる。したがって,

$AQ:QC=(AS+SQ):QC=(21b+9b):5b=6:1$

になる。

解説 1 から解説 3 においてそれぞれを授業で単独で扱うと, 面白さが中々伝わらないだろう。そこで、解説 3 の授業をした後，解説 1 や解説 2 の授業をする方がより平面幾何の面白さに気付くのではないだろうか。解説 3 を最初に授業で扱う際も，試行錯誤しながら補助線をどこに引けばいいかという図形的な感覚に慣れてから, 解説 1 や解説 2 のようなに, ある程度型が決まったことを指導する方が, 生徒・学

生達は理解しやすいと思われる。

　また、3 つの授業展開を紹介してみたが、導入教育としてコンピューターを使った指導もある。
ウェブ上で多くの数学のフリーソフトがあり、その中でよく使われるソフト GeoGebra［4］がある。 このソフトを使って図形に親しみを持たせるのが狙いであり，なおかつ求める答えのおおよその値も推測できるので授業展開もしやすいと思われる。実際 GeoGebra を使って図形を描いて，それぞれの辺の長さを求めたのが図 3 である。

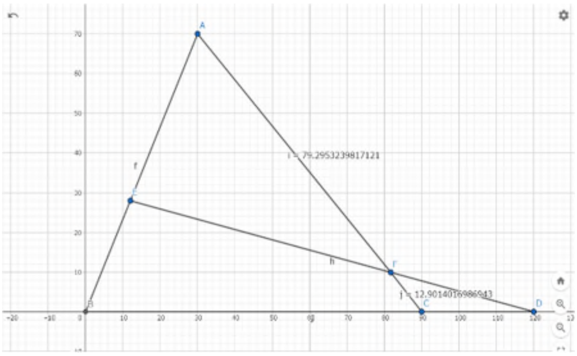


図 3（GeoGebra を使って例題 1 の作図）

3. 具体例からの考察（2）

　2 章の例題より，難しい例題を授業で展開したときの解説を与える。

例題 2　四角形 $ABCD$ があり（図 4)，

$\angle ABD = 22^\circ$,　$\angle CBD = 30^\circ$,　$\angle ACB = 26^\circ$,

$\angle ACD = 30^\circ$ となるとき，$\angle CAD$ の大きさを求めなさい。

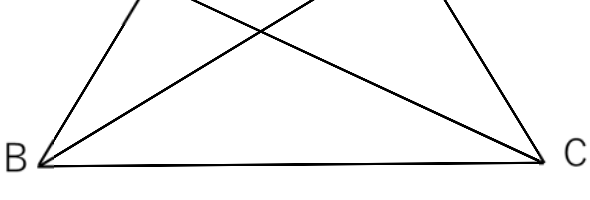


図 4

解説

点 E を $\angle CED = \angle CDE = \angle DCE = 60^\circ$ となるようにとる（図 5)。

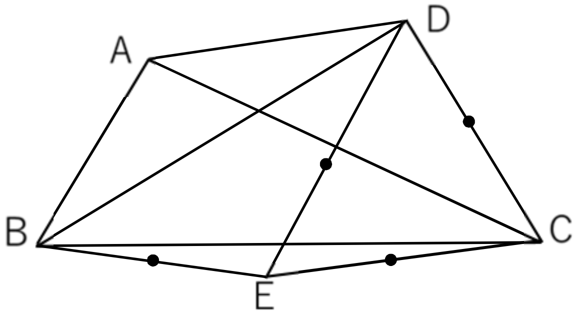


図 5

$\angle CED = 2\angle CBD$ より，点 B は円周角の定理の逆により，点 E を中心とし半径 $EC = ED$ となる円周上にあることがわかる。よって，$EB = EC = ED$ となり $\angle EBC = 4^\circ$ になる（図 5)。

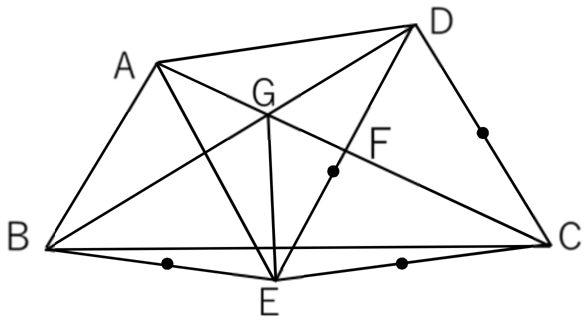


図 6

線分 AC と線分 DE の交点を F ，線分 AC と線分 BD の交点を G とする（図 6)。三角形 CDF と三角形 CEF は合同になり，線分 AC と線分 DE は垂直で $DF = EF$ となる。このことから，三角形 GDF と三角形 GEF，三角形 ADF と三角形 AEF はそれぞれ合同になる。
三角形 EBD は二等辺三角形より，$\angle GBE = \angle GDE = \angle GEF = 34^\circ$ となり，$\angle EGF = 56^\circ$ となる。$\angle ABE = \angle EGF = 56^\circ$ より，四角形が円に内接する定理から，4 点 A, B, E, G は同一円

周上にある。 円周角の定理により，$\angle GBE = \angle GAE = 34^\circ$ となる。三角形 ADF と三角形 AEF が合同より，$\angle GAE = \angle GAD = \angle CAD = 34^\circ$ となる。

2 章で紹介した解説 3 のように，補助線をかなり引かなければ解法がわからない例題であるが，1 本ずつ補助線を引いて誘導しながら授業展開する方法もある。授業の導入では，数学ソフト GeoGebra（図 7）を使って答えを予測してから授業展開する方法は生徒・学生が平面幾何に興味を持つ可能性が大いにある。

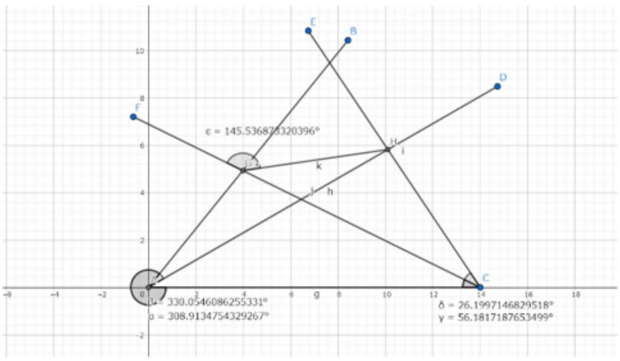


図 7（GeoGebra を使って例題 2 の作図）

また，より平面幾何に興味をもっている生徒・学生に対しては次のような例題を与えてもよい。

例題 3 四角形 $ABCD$ があり，$\angle ABD = (2x-30)^\circ$，$\angle CBD = 30^\circ$，$\angle ACB = x^\circ$，$\angle ACD = 30^\circ$ となるとき，$\angle CAD$ の大きさを求めなさい。ただし，$15 < x < 30$ とする。

例題 3 は例題 2 と同じように解けるので，$\angle CAD = (60-x)^\circ$ となる。

4. まとめ

２つの例題を与えて，平面幾何の授業展開を考察してきたが，例題 1 の解説 3 や例題 2 のように補助線をどのように引くかを考えさせる教育を実践していきたいが，実際の授業では補助線 1 本を引くのも困難な場合が多数ある。これらの場合も，3 章で述たように誘導しながらうまく実践させることが可能であると思う。そして，導入教育で数学ソフトを活用していけば，生徒・学生もより興味を抱いて授業を受けるかもしれない。

最後に、例題 2 などはいまだ授業実践はしていないが，例題や数学ソフトは多数あるのでそれらを用いて今後の授業を実践していきたい。

参考文献

[1] 中学校学習指導要領（平成 5 年 4 月施行）解説- 文部科学省
[2] 高等学校学習指導要領（平成 6 年 4 月施行）解説- 文部科学省
[3] 高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説- 文部科学省
[4] GeoGebra :http:www.geogebra.org/?lang=ja