

## 歯付きベルトの強制振動\*<sup>1</sup>

大崎栄喜\*<sup>2</sup>・森元映冶\*<sup>2</sup>・桐畑友明\*<sup>3</sup>・古賀勝之\*<sup>4</sup>

### Response of Timing Belt to Forcing Excitation\*<sup>1</sup>

Eiki Osaki\*<sup>2</sup>, Eiji Morimoto\*<sup>2</sup>, Tomoaki Kirihata\*<sup>3</sup>, and Katuyuki Koga\*<sup>4</sup>

This paper describes the experimental investigation results of harmonic resonance phenomena for a timing belt stretched vertically. The resonance treated in this report is one of the resonances excited under forcing excitations in which the forced lateral displacement acts at a low end of the timing belt. The theory of the nonlinear forced vibration of a string already treated by Oplinger was applied to the vibration analysis of the timing belt. From a comparison of the experimental results with the calculated results, characteristics of tension variations and amplitude of the timing belts approximately agreed with Oplinger's theory.

#### 1 はじめに

歯付きベルトは、自動車のOHC機関、小形ディーゼル機関、工作機械、精密機械などの動力伝達およびタイミング機構用として広く使用されている。この歯付きベルトには、トルク変動、タイミングプーリとベルトのかみあい、プーリ軸の偏心により、周期的な張力変動や強制変位が作用して激しい横振動が発生する。この横振動は、ベルトの破損や機械・機器の運転精度の低下を起こす原因となる。歯付きベルトの振動を防止するには、横振動の振動特性を明らかにし、横振動の要因を解明することが非常に重要である。しかしながら従来、ベルトと同じような連続体である弦の振動特性に関する研究<sup>1-4)</sup>および歯付きベルトと同

様に動力伝達用として使用されるローラチェーンの振動特性に関する解析<sup>5-8)</sup>は行われているが、歯付きベルトの振動特性に関する検討<sup>9-17)</sup>は比較的少ないようである。

そこで本報では、歯付きベルトの振動特性を明らかにするための基礎的な研究として、周期的な強制変位が歯付きベルトの一端に作用するときに発生する横振動について、その振動特性を実験的に検討した。またすでにCarrier<sup>1)</sup>およびOplinger<sup>2)</sup>によって検討されている、弦の振動中に張力が変化した場合の理論を歯付きベルトに適用して数値計算を行い、この計算結果と実験結果を比較検討したところ、歯付きベルトの強制振動の挙動は計算結果とほぼ一致した。

水産大学校研究業績 第1598号, 1998年7月6日受付.

Contribution from National Fisheries University, No.1598. Received Jul. 6, 1998.

\* 1 日本舶用機関学会平成4年度春季学術講演会にて発表

\* 2 水産大学校海洋機械工学科海洋環境工学講座 (Laboratory of Ocean Environmental Engineering, Department of Ocean Mechanical Engineering, National Fisheries University)

\* 3 水産大学校練習船耕洋丸 (Training Ship Koyo-Maru, National Fisheries University).

\* 4 水産庁 (Fisheries Agency).

## 2 主な記号

本報で使用した基本的な記号は以下のとおりである。

$A$  : ベルトの断面積

$E$  : ベルトの縦弾性係数

$T_0$  : ベルトの初期張力

$T$  : 振動中に作用するベルトの全張力

$\Delta T$  : ベルトの振動による張力変動

$m$  : ベルトの単位当たりの質量

$L$  : ベルトのスパン

$S$  : 振動中のベルトの長さ

$B$  : 強制変位の振幅

$f$  : 強制振動数

$\nu$  : 分離定数

$c = (T_0/m)^{1/2}$

$f_0 = c/2L$

$\epsilon = EA/T_0$

$\sigma = 2\nu L$

$\eta = B/L$

$\tau = \Delta T/T_0$

$\tau_0 = \epsilon \eta^2/2$

$\Omega = f/f_0$

$M = y(x=L)/B$

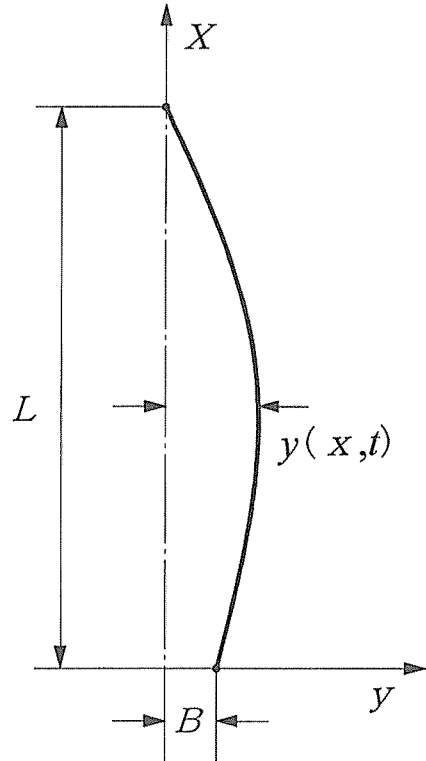


Fig. 1. Vibration model of timing belt

## 3 運動方程式

走行していない歯付きベルトの下端に強制変位が作用した場合、ベルトの振動系は Fig. 1 に示すように考えることができる。

ここで、歯付きベルトの曲げこわさおよび摩擦の影響を無視すると、Fig. 1 において、ベルトが振動して長さが  $S$  になるとき、ベルトに加わる全張力  $T$  は、フックの法則から次のように表される。

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 + EA \frac{S-L}{L} \quad (1)$$

式(1)において、振動中のベルトの長さ  $S$  は一般に次式で表される。

$$S = \int_0^L \left\{ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} dx \quad (2)$$

式(2)の左辺をベキ級数に展開して高次の項を省略すると、

$$\left\{ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

となる。ここで、式(2)および(3)を式(1)に代入すると次式となる。

$$T = T_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4)$$

歯付きベルトを弦と考えると、その横振動は弦の波動方程式を用いると、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left( \frac{T}{m} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5)$$

で表される。ここで、式(4)を式(5)に代入して整理すると、振動による張力変動を考慮した歯付きベルトの運動方程式は、次式のような非線形方程式で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{EA}{2LT_0} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (6)$$

ここで、式(6)の解を  $y = P(x) Q(t)$  とおき、分離定数を  $\nu$  として変数分離を行い、整理すると次式となる。

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + c^2 \nu^2 \left\{ 1 + \left( \frac{EA}{2LT_0} \right) I Q^2 \right\} Q = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \nu^2 P = 0 \quad (8)$$

ただし、

$$I = \int_0^L \left( \frac{dP}{dx} \right)^2 dx \quad (9)$$

である。ここで、式(8)の一般解を、

$$P(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x$$

とおき、歯付きベルト両端の境界条件を  $P(0) = 0$  および  $P(L) = B$  とすると次式が得られる。

$$P(x) = B \frac{\sin \nu x}{\sin \nu L} \quad (10)$$

式(10)を式(4)に代入すると次式になる。

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{EAB^2 \nu^2}{4L \sin^2 \nu L} \left( L + \frac{\sin 2\nu L}{2\nu} \right)$$

ここで、

$$\tau = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{EAB^2 \nu^2}{4T_0 L \sin^2 \nu L} \left( L + \frac{\sin 2\nu L}{2\nu} \right) \quad (11)$$

である。式(9)、(10)および(11)を式(7)に代入して整理すると次式となる。

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + c^2 \nu^2 (Q + \tau Q^3) = 0 \quad (12)$$

式(12)の解は次のようなヤコビの楕円関数<sup>3)</sup>で与えられる。

$$G(t) = \text{cn} \left\{ c \nu (1 + \tau)^{1/2} t, K \right\} \quad (13)$$

式(10)および(13)より式(6)の解は次式で表すことができる。

$$y = B \frac{\sin \nu x}{\sin \nu L} \text{cn} \left\{ c \nu (1 + \tau)^{1/2} t, K \right\} \quad (14)$$

$K$ は第1種の完全楕円積分で次式で表すことができる。

$$K = \int_0^{L/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi$$

$$\doteq \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{k}{2} \right)^2 \right\}$$

ここで、上式の  $k^2$  は母数で次のように表される。

$$k^2 = \frac{\tau}{2(1 + \tau)}$$

また、 $\Omega = f/f_0$  は式(13)から次式で表される。

$$\Omega = \frac{f}{f_0} = \frac{2\nu L(1 + \tau)^{1/2}}{4K} \quad (15)$$

式(14)および(15)より、 $\Omega$  と  $M = y(X=L/2)/B$  および  $\Omega$  と  $\tau$  との関係を求めることができる。

#### 4 実験装置および方法

実験では、供試ベルトとして、ベルトスパン  $L=610\text{mm}$ 、単位長さ当たりの質量  $m=6.41 \times 10^{-3} \text{kg/m}$ 、縦弾性係数と断面積の積  $EA=11.5 \times 10^4 \text{N}$  の歯付きベルトを使用した。供試ベルトの形状および寸法を Fig. 2、実験装置の概略図を Fig. 3に示す。

実験は以下の方法で行った。供試ベルト①を、滑らかに上下するボールスプライン②、ひずみゲージ式張力計③およびリンクボール④に直結した上端チャック⑤と下端チャック⑥の間に鉛直に取り付けた。その後リンクボール④を緩やかに回転させて供試ベルトに初期張力を与え、可変速モータ⑦で偏心カム⑧を回転させて下端チャックを固定した直動ガイド⑨を駆動し、供試ベルトの下端に周期的な強制変位を加えた。この強制変位の大きさは渦電流式変位計⑩、供試ベルトの振動は1次モードの振幅をベルトスパンの1/2でレーザ式変位計⑪を用いて計測した。また、

振動中の張力変動は、ひずみゲージ式張力計③を介して動ひずみ計⑫を用いて計測した。なお、これら全ての計測量は電磁オシログラフ⑬に記録した。

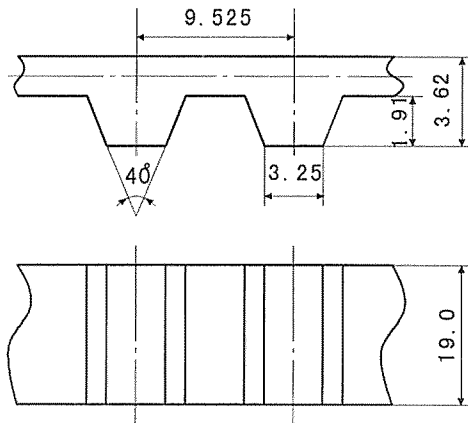


Fig. 2. Test belt configuration

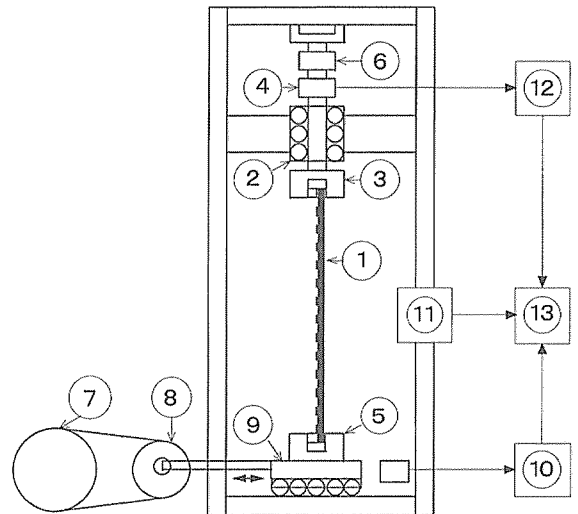
## 5 実験および計算結果

Fig. 4およびFig. 5は、供試ベルトに加える初期張力および強制変位の大きさを変化させて行った強制振動実験の1次モードの振動特性である。図の横軸は、供試ベルトに初期張力  $T_0$  を与えて実験的に求めたベルトの固有振動数  $f_0$  と強制振動数  $f$  との比  $\Omega$  である。また、振幅特性の縦軸は、強制変位  $B$  とベルトスパンの1/2での振動振幅との比  $M$ 、張力特性の縦軸は、初期張力  $T_0$  と振動による張力の増加  $\Delta T$  との比  $\tau$  である。図中、○印はモータの回転数を徐々に上げていくと発生する振動、●印はモータの回転数を徐々に下げていくと発生する振動である。矢印は跳躍した方向を示し、実線は式(14)および(15)を用いて計算した結果を示す。

### 5.1 振幅および張力特性

強制変位  $B=0.105$  mm を一定にして、初期張力  $T_0=19.6$  N (固有振動数  $f_0=14.3$  Hz) および初期張力  $T_0=39.2$  N (固有振動数  $f_0=20.4$  Hz) とした場合の振幅特性を Fig. 4 (a), (b) に、張力特性を Fig. 4 (c), (d) にそれぞれ示す。また、強制変位  $B=0.21$  mm を一定として、初

期張力  $T_0=19.6$  N (固有振動数  $f_0=14.3$  Hz) および初期張力  $T_0=39.2$  N (固有振動数  $f_0=20.4$  Hz) とした場合の振幅特性を Fig. 5 (a), (b) に、張力特性を Fig. 5 (c), (d) にそれぞれ示す。



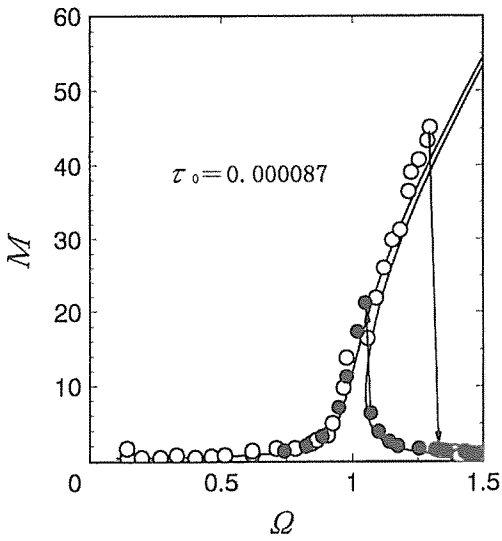
① Test belt, ② Ball spline, ③ Upper end chuch, ④ Load cell, ⑤ Lower end chuch, ⑥ Ball joint, ⑦ Variable speed motor, ⑧ Eccentric cam, ⑨ Linear guide, ⑩ Eddy current type displacement meter, ⑪ Laser type displacement meter, ⑫ Strain meter, ⑬ Electromagnetic oscillograph recorder

Fig. 3. Schematic diagram of experimental apparatus

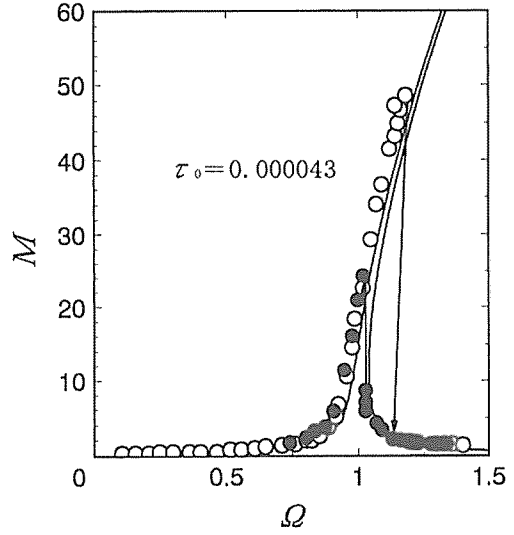
### 5.2 初期張力および強制変位の影響

歯付きベルトの下端に加わる強制変位  $B$  を一定とし、初期張力  $T_0$  を変化したときの振動特性を示す Fig. 4 (a), (b) から、初期張力の値が小さいときは、値が大きいときに比べて右方向への傾きが大きくなるのがわかる。

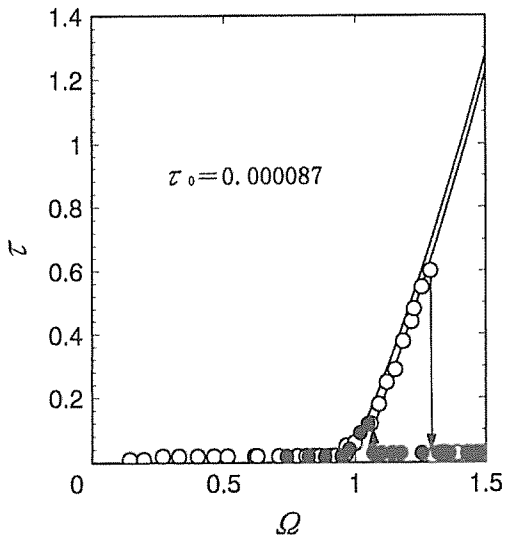
このことは、初期張力の値が小さいほど、すなわち  $\tau_0$  の値が大きいかほど非線形性が強くなり、典型的なハードスプリングの非線形振動が発生することを示す。また、張力特性を示す Fig. 4 (c), (d) から明らかなように、初期張力の値を変えても右方向への傾きは変化しないが、 $\tau_0$  の値が大きいほど、二つの線 (強制変位と同位相と逆位相線) の間隔が大きくなっている。



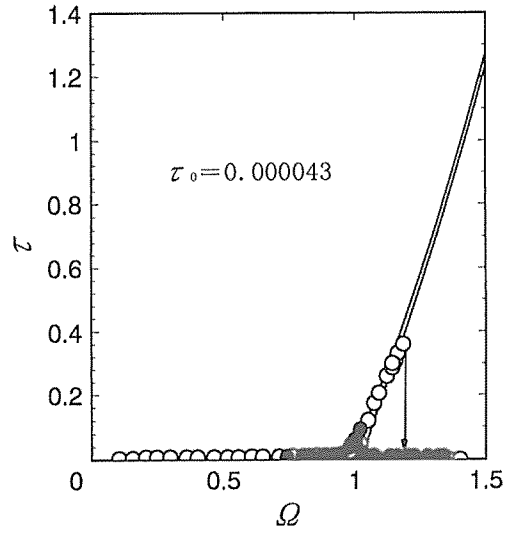
(a) Characteristics of amplitude at  $B=0.105$  mm,  $T_0=19.6$  N



(b) Characteristics of amplitude at  $B=0.105$  mm,  $T_0=39.2$  N

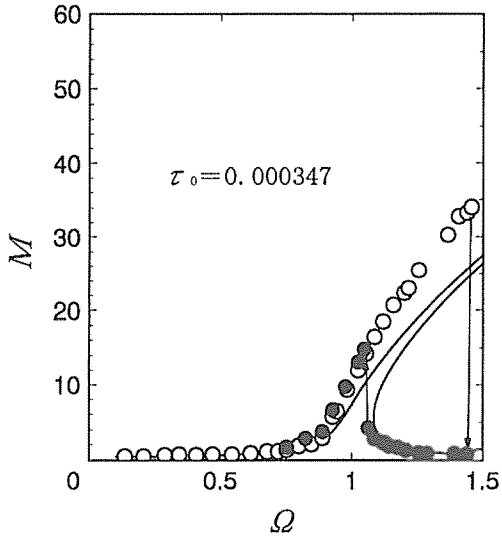


(c) Characteristics of tension fluctuation at  $B=0.105$  mm,  $T_0=19.6$  N

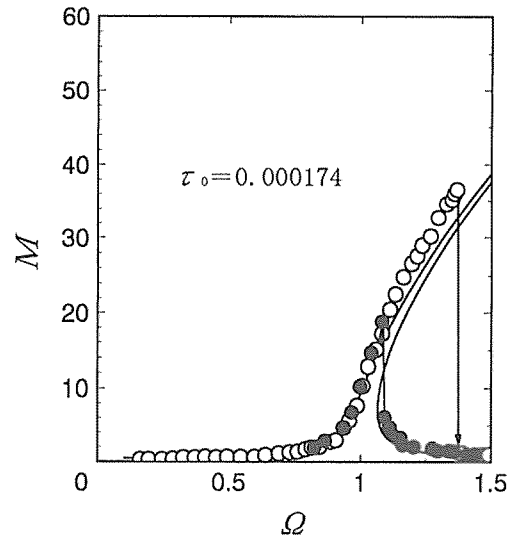


(d) characteristics of tension fluctuation at  $B=0.105$  mm,  $T_0=39.2$  N

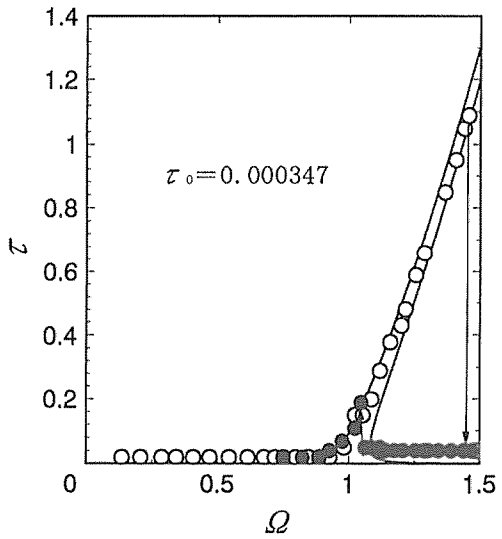
Fig. 4. Resonance characteristics of test belt



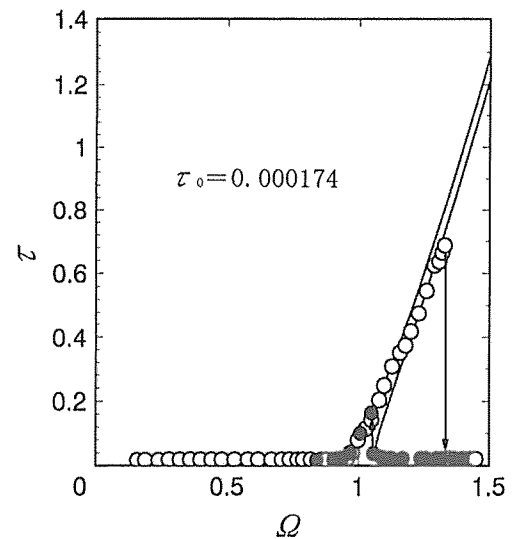
(a) Characteristics of amplitude at  $B = 0.21$  mm,  $T_0 = 19.6$  N



(b) Characteristics of amplitude at  $B = 0.21$  mm,  $T_0 = 39.2$  N



(c) Characteristics of tension fluctuation at  $B = 0.21$  mm,  $T_0 = 19.6$  N



(d) Characteristics of tension fluctuation at  $B = 0.21$  mm,  $T_0 = 39.2$  N

Fig. 5. Resonance characteristics of test belt

一方、初期張力を一定とし、強制変位を変化させたときの振動特性を示す Fig. 4, 5 (a), (b) から、強制変位の値が大きくなるほど  $\tau_0$  の値が大きくなり、右方向への傾きが大きくなり、非線形性が強くなることがわかる。この現象は、張力特性を示す Fig. 5 (c), (d) についても  $\tau_0$  の値が大きくなると Fig. 4 (c), (d) と同じ傾向である。なお、これらの振動特性は計算結果とほぼ一致している。

## 6 おわりに

歯付きベルトの下端に周期的な強制変位が加わるときに発生する横振動について検討した結果をまとめると、以下のようなになる。

1. 初期張力の値があまり大きくない範囲では、強制変位の値が大きくなると、すなわち  $\tau_0$  が大きくなると振幅特性および張力特性ともにハードスプリングの非線形特性が顕著に現れる。このことから、 $\tau_0$  の値より非線形性の強さを推定することができる。

2. 歯付きベルトを弦と考え、Oplinger や Carrier の理論を適用した計算結果と実験結果はほぼ一致した。

## 参考文献

- 1) G.F.Carrier : *Quart. Appl. Math.*, 32-12, 1529-1538 (1960).
- 2) W.F.Ames : *Non-Linear Partial Differential Equations in Engineering.*, Academic Press, Inc. 1965, pp.104-107.
- 3) G.V.Anand : *J. Acoust. Soc.*, 40-6, 1517-1528 (1966).
- 4) J.J.Stoker : *Nonlinear Vibration in Mechanical and Electrical System.*, inters cience Publishers, New York, 1950, pp.189-219.
- 5) R.C.Binder : *Mechanics of the Roller Chain Drive.*, Prentice Hall, Inc. 1956.
- 6) Shimizu,H. et al : *Theoretical and Applied Mechanics.*, 21, p.43 (1971).
- 7) 清水・末岡 : 九大工学集報, 46-6, 739-784 (1973).
- 8) 末岡・ほか 4 名 : 機論, 51-465, 912-919 (1985).
- 9) 小山・ほか 3 名 : 機論, 44-387, 3913-3922 (1978).
- 10) 小山・ほか 4 名 : 機論, 44-387, 3923-3931 (1978).
- 11) 籠谷・ほか 4 名 : 機論, 46-408, C 942-952 (1980).
- 12) 安田・鳥居 : 機論, 51-463, C 506-513 (1985).
- 13) 大崎 : 舶機誌, 28-5, 302-325 (1993).
- 14) 李・ほか 3 名 : 機論, 59-568, C 298-302 (1993).
- 15) 李・ほか 2 名 : 機論, 60-575, C 211-217 (1994).
- 16) 大崎・ほか 2 名 : 水大研報, 45-1, 19-24 (1996).
- 17) 大崎・ほか 2 名 : 水大研報, 45-2, 79-85 (1996).

1) G.F.Carrier : *Quart. Appl. Math.*, 32-12, 1529-1538