

発達期の吹送流に引き起こされる表層浮遊物質の 分散に関する解析法*1

安田 秀一*2

An analysis on dispersion of suspended particles due to the transient drift current

Hidekazu Yasuda

Dispersion process of the suspended particles near the sea surface has been analyzed taking more realistic transient drift current into account as the continuation of the previous work in which dispersion had been analyzed assuming the stationary drift current. Since the transient current cannot be expressed as an analytical form, the dispersion process was obtained from the numerical integration of the formal solution of the advective diffusion equation. This analysis has shown that the transient drift current induced dominant dispersion even at the initial stage as well as the stationary current because the transient one reached the stationary value at the sea surface at the early stage though the stationary value was not been easily recognized at some level from the sea surface.

1 はじめに

前報¹⁾では、気象要因による赤潮プランクトンの消滅の可能性を検討するために、表層に強いシアを形成する吹送流が、表層に浮遊する物質に及ぼす分散過程を解析し、シアと拡散物質が表層に偏っていることによって、かなり速い段階で大きな分散係数が生じることを示した。ここでは、解析的な扱いに拘ったために、吹送流は解析解として得られる定常流を導入したが、実際の現象を考えると、仮に風が突然に吹き始めたとしても、それに引き起こされる吹送流は徐々に発達していくはずで、前報の解析結果が現実離れしている可能性も否めない。本報では、理想的なモデルの中ではあるが、より現実的な発達期の吹送流を導入し、そのような流れのシアによる分散の解析を試みることによって、分散係数まで導くことができた。ここでは、前報の補足の意味でその解析手法を紹介し、その中で引き起こされる分散過程の1例を分散係数で示す。

2 発達期の吹送流と分散モデル

発達期の吹送流は、静止状態 ($t=0$ において全水深で流速ベクトルが0) から一様な風が y -軸方向に突然吹き始めた場合に、次のような運動方程式から得られるものを取り上げる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2)$$

u と v はそれぞれ流れの x 方向と y 方向の成分で、 t は時間を示す。また、 f はコリオリパラメータで、 μ は鉛直粘性係数である。海水の密度は一定と仮定して、ここでは簡単にするために 1 g/cm^3 とする。

海面での風の応力を T とすると、海面 ($z=0$) と十分に深いところにおける境界条件は次のように書き表される。

*1 本論文の主要な部分は、2003年度日本海洋学会春季大会で口頭発表をした。

*2 水産大学校水産情報経営学科 (Department of Fisheries Information and Management, National Fisheries University).

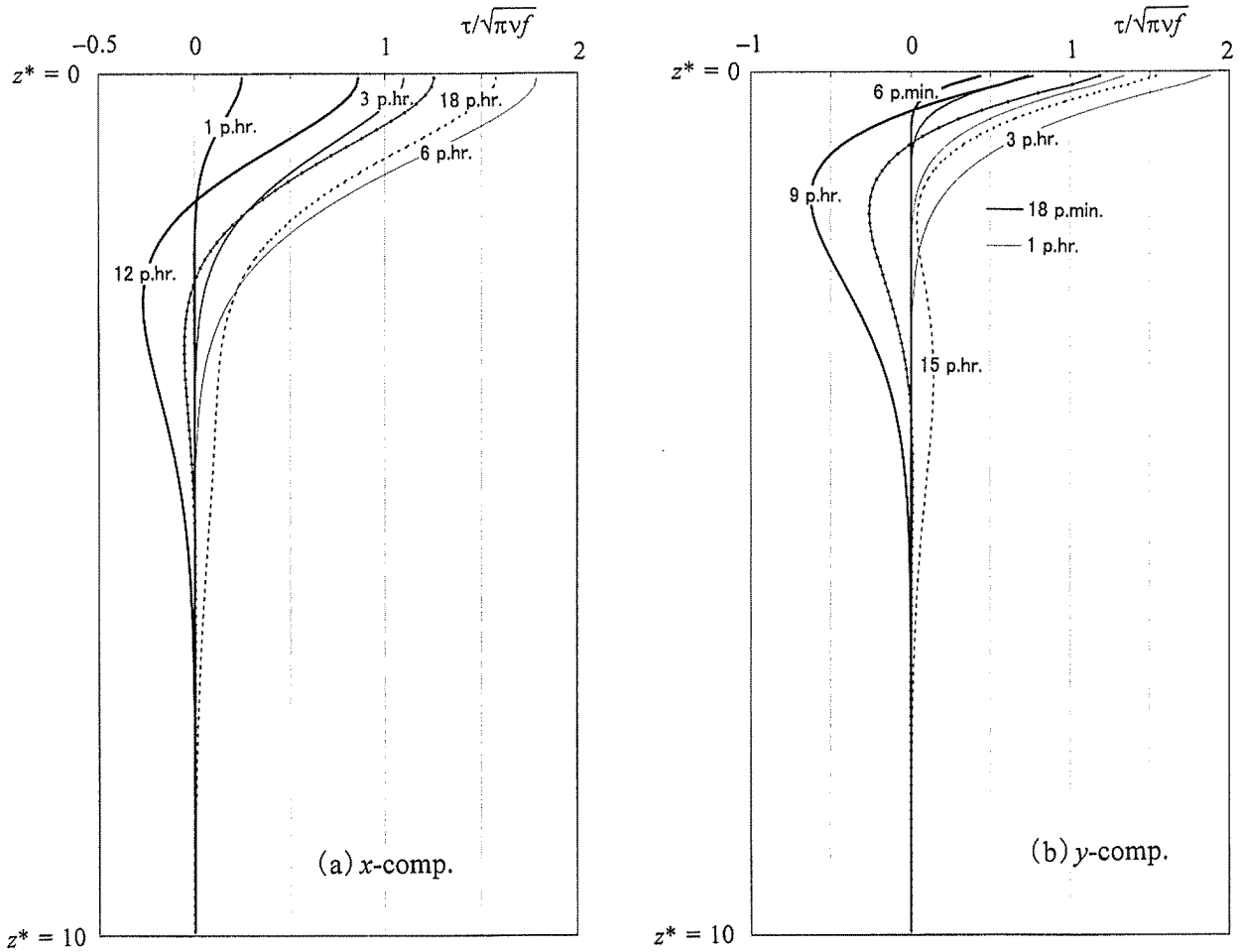


Fig. 1. Vertical profiles of horizontal components of the transient drift current at each pendulum time. (a) and (b) are respectively x and y -directional components. The ordinate showing the nondimensionalized depth represents the whole depth of the basin ($H^* (= \beta H) = 10$) from the water surface to the floor. The abscissa is the velocity normalized by $\tau / \sqrt{\pi \mu f}$. Curves with dots in both figures show the vertical profiles of the stationary drift current.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad -\mu \frac{\partial v}{\partial z} = T \quad \text{at } z = 0$$

$$u = v = 0 \quad \text{at } z \rightarrow \infty$$

この解は、定常流の場合に比べてかなり複雑であるが、すでに次のように導かれている²⁾。

$$u(z, t) = \frac{T}{\rho \sqrt{\pi \mu}} \int_0^t \frac{\exp[-z^2/4\mu t']}{\sqrt{t'}} \sin ft' dt' \quad (3)$$

$$v(z, t) = \frac{T}{\rho \sqrt{\pi \mu}} \int_0^t \frac{\exp[-z^2/4\mu t']}{\sqrt{t'}} \cos ft' dt' \quad (4)$$

後で示す作図の都合上、鉛直軸 z は $\beta (= \sqrt{f/2\mu})$; この逆数は Ekman 境界層厚の代表寸法に相当) を用いて、 $z^* = \beta z$ のような無次元化をし、時間については無次元時間 $t^* = ft$ を導入すると、(3) と (4) は、それぞれ次のように書き改めることができる。

$$u(z^*, t^*) = \frac{T}{\rho \sqrt{\pi \mu f}} \int_0^{t^*} \frac{\exp[-z^{*2}/2t^{*'}]}{\sqrt{t^{*'}}} \sin t^{*' } dt^{*' } \quad (3)'$$

$$v(z^*, t^*) = \frac{T}{\rho \sqrt{\pi \mu f}} \int_0^{t^*} \frac{\exp[-z^{*2}/2t^{*' }]}{\sqrt{t^{*'}}} \cos t^{*' } dt^{*' } \quad (4)'$$

この流れは、数値積分をすることによって描くことができるが、その解曲線は、各レベル毎に発達する流れをホドグラフにして表したものとして、海洋物理学の教科書などで目にすることがある³⁾。ここでは流れの鉛直分布の発達過程をわかりやすくするために、Fig. 1 に流れの x -方向と y -方向成分の鉛直分布を各時刻 (p.min. と p.hr. はそれぞれ pendulum minute と pendulum hour を表す) 毎に描いた。この分布図は、水深が $H^* (= \beta H) = 10$ の場合のもので、横軸の流速は、 ρ を 1 g/cm^3 として $\tau / \sqrt{\pi \mu f}$ で規格化している。因みに、 $\exp(-10) \approx 4.5 \times 10^{-5}$ で、水深 $z^* = 10$ においては流れはほとんど生成されず、Fig. 1 の流れは水深が無限大の場合の流れとほとんど同じであると言える。

定常状態の表面での流速は、 x 方向、 y 方向成分とも1.25に相当し、それを U_0 とする。これを見ると、吹送流は1 p.hr.経過までは自転効果はあまり現れることもなく、風下方向 (y -方向) にシアアの強い吹送流が形成されるが、それを過ぎる頃になると、徐々に自転効果の影響を受けて、右方向 (x -方向) の流れが生成されている様子が伺える。図中のドットで印した曲線は、前報で扱った定常状態のEkman螺旋を形成する吹送流の流速分布である。

浮遊物質の拡散は、(3) と (4) の流れの中で次のような拡散方程式で支配されるものとする。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u(z, t) \frac{\partial S}{\partial x} + v(z, t) \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = k \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (5)$$

S は拡散物質の濃度で、 w は浮遊物質がその粒子の大きさと重さ(密度)に関わる浮遊上昇速度(ここで z は下向きに正をとっているために、 w は負の時に上昇速度となる)、 k は鉛直拡散率である。現象を簡略化するために、浮遊物質の鉛直分布は、風が吹き始める時点で、すでに定常状態になっているものとする、浮遊物質の初期条件は、平面的には $x=0, y=0$ の位置に密集しているもの(水平面内の点源)として、次のように与えることができる。

$$S = S_0 \frac{w/k}{e^{\omega/k} - 1} e^{(\omega/k)z} \delta(x) \delta(y) \quad \text{at } t=0 \quad (6)$$

$$wS - k \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0 \text{ (海面) and } z=H \text{ (海底)} \quad (7)$$

$$S = 0 \quad \text{at } x, y \rightarrow \pm\infty \quad (8)$$

初期条件(6)の S_0 は拡散物質の総量で δ はDiracのデルタ関数である。赤潮プランクトンを想定すると、パッチ状に与えることが考えられるが、本報では分散係数に着目することから、水平的には、拡散を扱う上で基本となる点源で与えた。

拡散現象の解析においては、分散係数dispersion coefficientは、次のように統計的分散値varianceの時間変化率で定義される⁴⁾。

$$\text{Dispersion Coefficient} = \frac{1}{2} \frac{d[\text{Variance}]}{dt} \quad (9)$$

前報でも示したように、統計的分散値は二次のモーメント M_0 と一次のモーメント M_1 、0次のモーメント M_0 によって次のように表される。

$$\text{Variance } \sigma_{ij}^2 = \frac{M_{ij}}{M_0} - \frac{M_i}{M_0} \cdot \frac{M_j}{M_0} \quad (10)$$

ちなみに添字 i と j は x 方向または y 方向を表す指標で、 i と j が共に x 方向または y 方向を示す場合は、それぞれ x -方向または y -方向の統計的分散値で、 i と j が異なる方向を示す場合は共分散値を表す。詳しくは前報¹⁾に記している。

拡散方程式(5)の両辺を x 方向と y 方向の水平面内全領域で積分すると、0次のモーメント M_0 を求めるための拡散方程式が書き表され、 x_i を乗じて同様に全領域で積分すると、 x_i 方向の一次のモーメント M_1 を求める拡散方程式が導かれる。また、 x_i と x_j を乗じて全領域で積分すると二次のモーメント M_2 に関する拡散方程式が得られる。因みに M_{ij} に関する拡散方程式は次のように書き表される。

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial t} + w \frac{\partial M_{ij}}{\partial z} - k \frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial z^2} = u_i M_j + u_j M_i \quad (11)$$

0次のモーメントは、初期条件を(6)のように与えたために、時間的な変動はなく、定常値として次のように書き表される。

$$\begin{aligned} M_0(z, t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} S(x, y, z, t) dx dy \\ &= \frac{S_0}{H} \frac{\omega}{e^{\omega} - 1} \exp\left(-\frac{\omega}{H}z\right) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $\omega (= wH/k)$ は水深と拡散係数で無次元化した拡散物質の浮遊上昇速度である。

i 方向の1次のモーメント $M_1(z, t)$ は、次のように表され、導くことができる。

$$\begin{aligned} M_1(z, t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} x_i S(x, y, z, t) dx dy \\ &= \int_0^H \int_0^1 G(z, t; \xi, \tau) u_i(\xi, \tau) M_0(\xi, \tau) d\tau d\xi \end{aligned} \quad (13)$$

x_i は x か y のことで、 u_i は u か v のことで、 i によって定まる。 $G(z, t; \xi, \tau)$ は拡散方程式のグリーン関数で、後で詳しく述べる。

2次のモーメント $M_2(z, t)$ は、 i と j が同じ場合には x 方向か y 方向のものを意味し、 i と j が異なる場合にはクロスモーメントを意味している¹⁾。

$$\begin{aligned} M_2(z, t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} x_i x_j S(x, y, z, t) dx dy \\ &= \int_0^H \int_0^1 G(z, t; \xi, \tau) \{u_i(\xi, \tau) M_j(\xi, \tau) \\ &\quad + u_j(\xi, \tau) M_i(\xi, \tau)\} d\tau d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

ここで扱う拡散方程式のグリーン関数 $G(z, t; \xi, \tau)$ が明らかになれば、既知の流速分布のもとで、0次のモーメントから、順次、高次のモーメントが導かれることがわかる。

式 (11) に示すように、 n 次のモーメントは、 $(n-1)$ 次のモーメントと流れの積を非斉次項とした鉛直移流項を含む拡散方程式に支配されているが¹⁾、その主要解 G を表す方程式は、次のように書き表すことができる。

$$k \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - w \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial t} = -\delta(z - \xi) \delta(t - \tau) \quad (15)$$

G は式 (13) と (14) のグリーン関数である。この主要解は、前報にも示したように次のように得ることができた。

$$G(z, t; \xi, \tau) = \frac{\omega}{e^w - 1} e^{\omega(z/H)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{K_n(z-t)}{(\omega/2)^2 + (n\pi)^2}} \times \{ \omega \sin p_n \xi + 2n\pi \cos p_n \xi \} \{ \omega \sin p_n z + 2n\pi \cos p_n z \} \quad (16)$$

ただし、 $\omega = wH/k$ 、 $p_n = n\pi/H$ 、 $K_n = \{(\omega/2H)^2 + p_n^2\} k$ のことである。

著者は、これまで流速分布も初等関数で表し、(13)、(14) の積分も解析的に行って、精度の高い数値解を導いてきたが、最近のようにパソコンが進歩してCPUも高速化すると、

(3)、(4) のような流れも数値積分で求めて、それを用いて、(13)、(14) の形式解も高精度な数値解として求めることができると考えられる。本研究では、流速(3)、(4) が初等関数で表すことができないために、このように数値積分によって解を導くという手法を適用した。この積分に際して、式(16)の中に $e^{K_n t}$ の項があることが、数値積分に制限が与えられるという問題が残る。例えばBASICのプログラムの中では通常 e の709乗を超える数値は扱うことが出来ないために、経過時間が長いときの値についてはフーリエ級数の項数を多くとることができない。ただ、この問題は、(16) のような解の性質上、鉛直平均値を議論する場合には、解が収束するまでの多くの項数をとる必要がないために、後述のような鉛直平均分散係数に着目する限り、数値積分による手法は有用な方法であると言える。

この数値解析手法によると、海面上の風が前述のように一様な場合だけではなく、時間的にも変動するときの吹送流の流速分布も求めることができ、それによる物質分散の解析も可能となる。今、海面上の風速ベクトル \underline{T} を x -方向成分 T_x と y -方向成分 T_y を用いて (17) のように与えると、それに引き起こされる吹送流の x -方向成分 u と y -方向成

分 v は、Duhamelの定理を適用して、(18) と (19) のように書き表すことができる。

$$\underline{T}(x, y, t) = iT_x(x, y, t) + jT_y(x, y, t) \quad (17)$$

i と j は、それぞれ x -方向と y -方向の単位ベクトルである。

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho \sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{\exp[-z^2/4\nu(t-t')]}{\sqrt{(t-t')}} \times \{ T_x(x, y, t') \cos f(t-t') + T_y(x, y, t') \sin f(t-t') \} dt' \quad (18)$$

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{\rho \sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{\exp[-z^2/4\nu(t-t')]}{\sqrt{(t-t')}} \times \{ T_x(x, y, t') \sin f(t-t') + T_y(x, y, t') \cos f(t-t') \} dt' \quad (19)$$

ただし、 x -方向と y -方向の依存性については、非線形項が生じないような緩やかな変動で、岸からは十分に離れたところでのみ、この解が成り立つと考えられる。風の変動については、海陸風のように日変動するものなどが挙げられるが、その変動特性を考慮した物質分散の解析については、別の機会に報告したいと考えている。ここでは、より現実的なモデルを目指して、その第一段階の解析として、 y -方向に向かう一様な風が突然に吹き出した場合の物質分散過程を対象とする。

式(9)、(10)のように、統計的分散値や分散係数は、それぞれのオーダーのモーメントに基づいて、水深 z と経過時間 t の関数で表すことができるが、実質的な水平方向の拡がり表現するためには、各水深毎の0次のモーメントの重みを考慮して、次のような平均分散値を導入した方が適切であると考えている。

$$\overline{\sigma_{ii}^2}(t) = \frac{1}{H} \int_0^H \sigma_{ii}^2(z, t) M_0(z, t) dz \quad (20)$$

先に述べたように、この式に基づく物質分散過程を調べるときには、(16)に見られるフーリエ級数の項数を、収束するほど多く計算する必要はない。(20) のような形で、 x -方向、 y -方向の分散値及び共分散値が求められ、二次元の統計的分散値が明らかとなって、(9)のように時間微分することからそれぞれの分散係数を導くことができる。

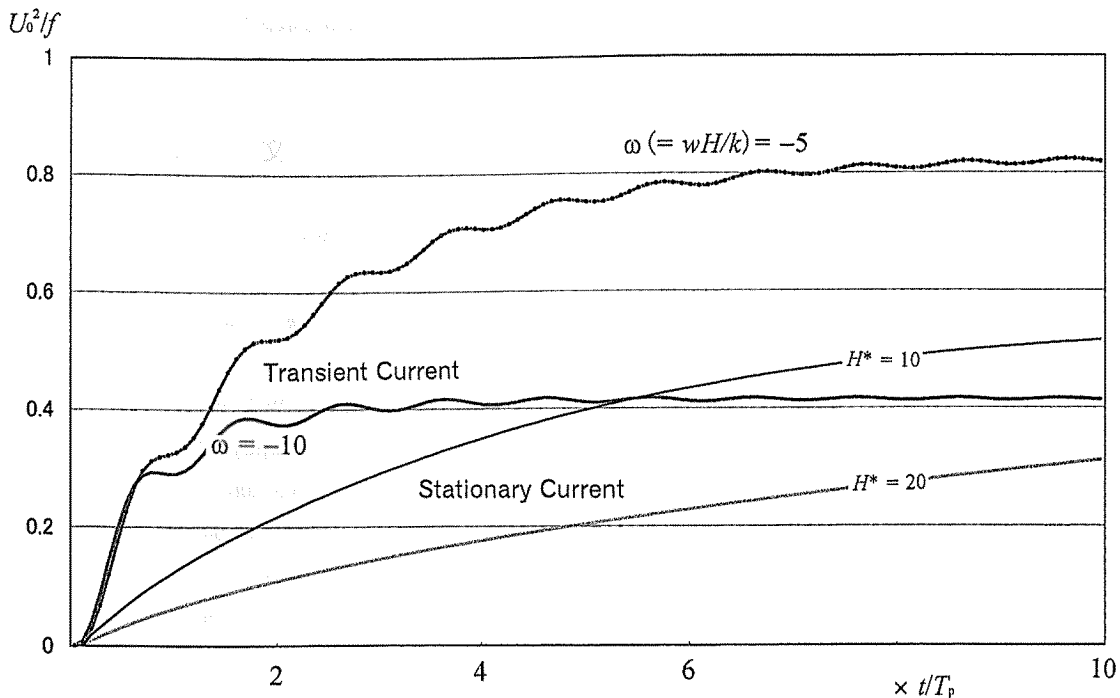


Fig. 2. Variations with time of the dispersion coefficient of suspended particles induced by the transient drift current. The abscissa, the elapsed time, is nondimensionalized by the inertia period, T_p , and the ordinate is the dispersion coefficient normalized by U_0^2/f . Wavy curves show the dispersion coefficients of the suspended matter in the transient drift current, while smooth curves show those of the dissolved matter ($\omega = 0$) in the stationary drift current.

3 分散係数の時間変化

懸濁態物質は、その大きさや重量密度によって、海水中で沈降速度や上昇速度を持つことになる。前報にも示したように、懸濁態物質の水深方向の分布を表す0次のモーメントの鉛直分布は、上昇速度と鉛直拡散率に依存して決まり、 $-wH/k$ で定義される無次元上昇速度 $-\omega$ （鉛直方向の z 軸を下向きにとっているため負の時に上昇速度となる）が、絶対値として大きいほどより上層に漂うことになる。この ω に依存する0次のオーダーのモーメント M_0 の鉛直分布については、前報のFig. 8に示している¹⁾。

Fig. 2に、前報のFig.10に代わるものとして、発達期の吹送流による分散係数の時間変動を描いた。横軸の時間は慣性周期 T_p （ $= 2\pi/f$ ）で無次元化した経過時間で、縦軸は U_0^2/f で無次元化した分散係数である。 U_0 は定常状態になったときの海面における吹送流の y -方向成分の値（ x -方向成分の値と同じ）を示す。

Transient Current（非定常流）と記したする曲線（変動しながら増加）が、 ω が -5 と -10 の場合の分散係数である。その場合の M_0 の鉛直分布は前報のFig. 8を参照のこと。水深はFig.1と同様に、 H^* （ $= \beta H$ ） $= 10$ の場合を描いている。Stationary Current（定常流）と記した滑らかな曲線は、

定常状態の吹送流によって $\omega = 0$ （溶存態物質に相当するもので、 M_0 が全水深に一様に分布）の物質が分散する様子を分散係数で表した。比較のために $H^* = 10$ と $H^* = 20$ の場合の分散係数を描いた。分散係数の値を具体的な一例で示すと、緯度が 30° 付近で $U_0 = 30$ cm/sの場合には、 U_0^2/f は 1.3×10^7 cm²/sのような値となる。

Fig. 1によると、風が吹き初めて1 p.hr（ $= 1/24 \times T_p$ ）経過すると、海面では吹送流の強さはほとんど定常状態の値に近くなり、それを反映するかのよう、発達期の吹送流においても、通常の溶存態物質の場合よりは速い段階で大きな分散係数になることがわかる。

4 考察とまとめ

前報¹⁾のFig. 9にも示したように、定常流による分散係数の定常値は非常に大きな値になる。従来の物質分散の解析のほとんどは、 $\omega = 0$ に相当する溶存態物質を対象にしておき、発達期のような過渡的な流れは考慮されなかったが、そのために、理論的には、分散係数が定常段階の値を示すには、通常の海域で1ヶ月に近い時間を要す^{1),4)}。自然の状態では、そのような長い期間、安定した状態が保たれたり、流れの方向に変化がないということはほとんど

ありえない。分散係数の定常値は比較的単純な数式で表記することができるために、それを現場海域の拡散能力のように扱うことも多いが⁵⁾、現実的には無意味な値であると言える。前報でも示したが、本研究においても、分散過程の初期段階に注目すると、表層に漂う物質については、分散係数はかなり早い段階で大きな値に達することがわかった。Fig. 2 には、 ω が-5 と-10 の場合を描いたが、最初の段階ではほとんど同じような増加を示しており、後は定常値の大きさに向かって収束していく様子が認められる。無次元時間が0.5程度（実時間で半日程度）経過したとき、分散係数は約0.3の値をとっているが、この値も緯度が30°で $U_0 = 30$ cm/s を仮定すると、 4×10^6 cm²/s に相当し、海洋乱流拡散の実験結果に照らし合わせると、拡散スケールにして200~500 km の場合に相当し⁶⁾、沿岸域では著しく大きい分散係数であると言える。

この度の解析で、変動しやすい吹送流による物質分散の解析も可能であることが示されたことから、今後の課題として、風の変動特性などを考慮して、実際のデータが適用

できる吹送流による分散係数を提案していきたいと考えている。

文 献

- 1) 安田秀一：水産大学校研究報告，51（4），201-211（2003）。
- 2) V. W. Ekman : *Ark. f. Mat., Astron. och Fysik*, 2 (11), 1-53 (1905).
- 3) G. Neumann and W.J. Pierson Jr. : *Principles of Physical Oceanography*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966, pp. 205-208.
- 4) H. Yasuda : *J. Oceanogr.*, 54, 151-164 (1998).
- 5) H.B. Fischer, E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger and N.H. Brooks : *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, 1979, pp. 80-103.
- 6) 大久保 明：海洋物理 I（海洋科学基礎講座 1），東海大学出版会，東京，1970，pp. 265-381.