Journal of National Fisheries University　　59（1）1－7（2010）

産業連関分析を応用例とする基礎線形代数の教授法
―経済・経営系の線形代数教授法の一提案―

楫取和明*†

A Teaching Method of Elementary Linear Algebra with applications to the Input-Output model

Kazuaki Kajitori

Abstract：Linear Algebra is one of the fundamental courses in college mathematics. According to our experiences, we found that the Input-Output Analysis can be used to motivate students of Linear Algebra. In this paper, we propose a way of teaching Linear Algebra with applications to the Input-Output analysis which is based on our experience of teaching Linear Algebra in recent years. The students in mind are those in economics areas and the course in mind is one which students take for the first time as a Linear Algebra course.

ASFA key words：Education, Economic analysis, Industries, Industrial production

はじめに

線形代数は，解析（実一変数の微分積分）と並んで，大学における数学の基礎と位置づけられている科目である。

ウェブ上で見ることのできるいろいろなシラバスから分かるとおり，線形代数の講義は段階別に複数の授業が組まれている学部学科が多い。そして，学生が最初にとるべき線形代数の授業では，学部学科のテーマへの応用はまったくないのが一般的のように思われる。しかし，線形代数のより進んだ授業が後に控えているかどうかによらず，最初の線形代数の授業で何のためにやるのか分かりづらい抽象的な事項を並べるより，学科に適した応用で動機付けを図ることは十分意味のあることではないだろうか。ただし，線形代数の数学としての基礎をおろそかにしないようにすべきことはいうまでもない。

筆者が水産大学校において線形代数を講義してきた経験からは，産業連関論は（経済・経営系の学生に限らず）学生への動機付けに適した題材であり，学生が最初にとるべき線形代数の授業にも簡単な形であれば十分組み込むことが可能である。

本論では，こうした水産大学校における線形代数の授業での経験を生かしながら，経済・経営系の学生が最初に学ぶ線形代数を，産業連関論を応用例として教授する方法を提案する。

産業連関論を線形代数の応用として取り入れた本として参考文献[1)]がある。これはこの本の著者が行った授業の内容をかなり敷衍したもので，後半は非負行列論としてかなり本格的な数学の記述が見られる。本論における産業連関論の題材の一部はこの本から得ている。しかし，この本はその序文にあるとおり著者が経済学部２年次生に講義した二学期分の内容（を敷衍したもの）で，前学期が線形代数，後学期が産業連関論と想定されている。　本論のように一学期分の基礎線形代数で産業連関論を扱うものではない。

アメリカでは「D.Carlson, et.al, The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra」[2)]が学生が最初に受講する線形代数の教授法に関して基本的な提言（recommendations）をした文献とされている。アメリカの教育事情は日本とは異なるが共通するところもあり（少なくとも数学そのものは同じ），十分参考になるものである。彼らの提言をここ

2010年6月18日受付．Received June 18, 2010.
*水産大学校水産流通経営学科（Department of Fisheries Distribution and Management, National Fisheries University）
†別刷り請求先（corresponding author）: kajitori@fish-u.ac.jp

に訳出してみる。注釈ではまた，彼らの提言に照らして我々の提案の方向を眺めてみる。

1．学生が最初に受講する線形代数の授業では，シラバスも実際の内容も対象学生の専攻に対応したものでなければならない。

（注釈）Carlson 等はこの提言の解説の中で，なんらかの応用を扱うべきと書いている。彼らは様々な専攻の学生を想定しているので，特定の専攻のための応用には触れていないが，我々の経済・経営系のための提案はこの提言に沿う。

2．線形代数の担当部署（原文では Mathematics Department）は，学生が受講する最初の線形代数の授業は行列の理論にすることを真剣に考慮すべきである。（注釈）まずはじめに，アメリカの大学における数学教育は数学科（Mathematics Department）が請け負うのが一般的である。Carlson 等の解説を引用すれば「この提言の意味するところは，抽象的なものより問題解法と動機づけのための応用に重点を置くということである。」この提言も，我々の方針に合致する。

3．担当者は学生の学習者としての必要性と興味を考慮しなければならない。

（注釈）抽象的（なのでいろいろに使われるのであるが）な印象を初学者に与えやすい線形代数を教えるに当たって「動機付け」は我々の大きな関心事であり，後述のようにそれは我々の提案にも反映されている。ただしここで，（線形代数の汎用性を示したいがために）欲張った動機付けプランを授業に詰め込む誘惑を教師は避けねばならない。学生が消化できなければ意味は無いからである。

4．担当者はコンピュータを授業で用いることが奨励されるべきである。

（注釈）我々の提案ではコンピュータの使用は時間的制約から盛り込まない。しかし，学生の自習用・小テスト用のシステム[10]を構築してあり線形代数にも使用を計画している。

5．数学のカリキュラムにおいては，２番目の線形代数の授業を設けることが高い優先順位を持つべきである。

提言５については，最終章で触れる。

すでに述べたように，本論は（漠然とした目的のはっきりしない線形代数の内容ではなく）経済・経営系用の線形代数の導入授業として応用まで含んだ内容を提案するものである。それに伴う制約を序章の最後に述べておく。

- 一学期間の内容で，しかも簡単なものとはいえ社会科学への応用まで含むのであるから，線形代数の題材から厳選することが避けられない。
- 題材を取捨選択する必要性は，時間の制約が唯一の理由ではない。今日多くの大学で学力の低下に対する対応が求められている。「学力低下は錯覚である」[4]という学力低下論争に一石を投じた本を書かれた神永正博氏は，近年（2009.11.1）の氏のブログ[5]で，工学系での数学教育においては「目的をはっきりさせること，役に立たない話をばっさりカットすることは，学生の学力が年々低下している（大学入学者の学力の低下）以上やむを得ない」と述べられている。ここで「役に立たない」とは $\varepsilon-\delta$ のような議論が工学部で計算もできない学生には役に立たないということを指しているが，神永氏の文脈を離れて，「役に立たない」を一般的に「目的に対して役に立たない」と解釈すれば，我々の現状認識と共通する（次章参照）。

  我々の提案する授業における目的をここではっきりさせれば，「産業連関論への簡単な応用を理解するための線形代数の基礎を学ぶこと」である。

  したがって，この目的に対して優先度が低いことがらは思い切って削除する方針である。

線形代数の導入 ー連立方程式論を核としてー

授業は 90 分授業で全体で 15 回として，これを最初の６回を導入部分として，残りを産業連関論の展開に必要な行列の知識と連関論への応用を扱う部分と切り分けて考えることにする。

導入部分は，線形代数の初学者に線形代数がどのようなものかを理解させ，基本を身につけさせると同時に彼らの興味を誘い，以後の授業の展開を容易にする大事な部分と位置づける。

本章では，産業連関論を応用例とした経済・経営系の学生が初めて受講する線形代数の内容として，導入の部分の内容について述べる。

この章と次章では，提案する授業内容を，実際に著者が水産大学校において行った線形代数の授業の経験，特に 2008 年度以後とそれ以前の比較を一つの拠り所として提示している。このような提示のし方を採る理由は，単に長年の講義経験を生かすという当たり前の理由以外に，我々の提案には「はじめに」の終わりに述べたように，昨今の

学生の状況に対応するという今日的な意味合いがあるからである。

2008年度以前は著者の行う線形代数の授業では，最初の6回ぐらいのうちに，連立方程式以外に，行列の一般的な表示やそれによる証明，幾何ベクトルや線形写像とその応用例の話をしたりして，動機付けと内容の充実を図るという方針をとっていた。1900年代はこれで学生の理解を図ることができたが，2000年代に入った頃から次第に学生の理解を図ることができなくなってきた。実際，単位取得者が激減していった。(2008年度以前の具体的内容は，改訂・増補しつつ2000年過ぎまでテキストとして使用していたウェブページ[8)](2006年度まで参考ページとして学生に紹介はしていた）に見られるものに準ずる。)

そこで，2008年度は最初の6回の授業は以下のような方針で臨んだ。

1．最小の予備知識は数の四則であることと，中学以来馴染みのある2元連立一次方程式の知識をもとに，もっと一般の連立一次方程式を含めて解のあり方（唯一の解を持つ，無限通りの解を持つ，解を持たない）を調べるというテーマを明示して，動機付けを図った。もちろん目指すのは，行基本操作による解法と，階数を計算することで解のあり方を調べること，かつ行列の正則性との関係を理解することである。
2．行基本操作は例示である程度一般性が見え易いという利点があるので，証明より例示による理解を図った。ただし，例示は2行2列の例から始めた。学生が中学で親しんだ2元方程式の例から始めることは重要である。

その結果として，2007年度の単位取得者が15人に対して，2008年度の単位取得者が52人と単位取得者数は大きく改善された。

また，2008年度の期末試験では授業の感想をついでに書かせたが，複数の感想として“頭を使う授業であった”という趣旨のものに加え，“久しぶりに数学が楽しいと感じた”というものがあった。“数学”をやっているという実感を表したものと受け取れる。

一方で，2008年度に限らず例年，導入部のあとに，行列式，固有値・固有ベクトル，および固有値・固有ベクトルの応用を扱ってきたが，2008，2009年度で若干の改善は見せたものの依然として未消化に終わった感がある（この点については次章で触れる)。すなわち2008年度の改善は，主に導入部分の変化によるものであると思われる。

この6回の内容で，学生が中学以来知っている連立一次方程式の一般論を2変数から説き起こし，行列算を使って連立方程式を簡潔に表し，階数の概念から正則性の判定，逆行列の計算までを行基本操作を用いて懇切丁寧に解説することで，学生は十分興味を示すし，行列の最低限の基礎として導入としての内容になっていると思う。産業連関論を扱うのにもっとも必要な内容でもある。

この6回の内容で使う唯一のテクニックは行基本操作であるが，いろいろな概念が出てこない点も初学者にとって大きな利点であろう。線形代数の授業を通して行基本変形を駆使することが効果があることは，参考文献[6)]でも述べられている。本論の授業案でも全般に渡って行基本変形を使うようにする方針である。

そこで，この6回の中で，逆行列の計算の前あたりで，基本操作に対応する基本行列[1)]を導入して，正方行列A，Bに対し$AB=I$なら$B=A^{-1}$であることを証明しておきたい。この証明は様々な概念を使ったいろいろな方法があるが，本論の授業案では多くの基礎概念を紹介する余裕はないので，ここで基本操作の関連で証明しておきたいからである。次のようにする。

Aの階段行列をKとすると，基本行列E_1，……，E_kがあって，$E_k \cdots\cdots E_1 A=K$と書ける。$AB=I$なら，

$$AB=E_1{}^{-1}\cdots E_k{}^{-1}KB=I$$

より，

$$KB=E_k\cdots E_1 \qquad (1)$$

もし，Kに0ベクトルの行があるならKBにも0ベクトルの行がある。(1)式の右辺は正則であるからこれは矛盾である。よって，$K=I$としてよく，Bは正則で，$AB=I$の両辺の右からB^{-1}をかければ$A=B^{-1}$。したがって$BA=I$で，$B=A^{-1}$。

この証明で必要な基本行列の性質は，学生にとってよい演習であるから，学生に課題として与えることで少し時間が稼げる。

導入部で扱うのが適当と思われる題材に幾何ベクトルがある。著者の授業でも高校数学からの接続として，しばしば導入部において線形変換やベクトル積などを含む幾何ベクトルの話を扱ってきた。幾何ベクトルはものごとを幾何学的直感でとらえるときの道具になるものであり，また一般的なベクトル空間の例としても基本的なものである。しかし，行列の理論として線形代数を見るとき，ベクトルは単に特殊な行列の別名あるいは総称として扱うことで済む。産業連関論には行列の理論があれば十分で幾何ベクトルおよびベクトル空間は不要である。

本論の提案では最初の線形代数の授業として産業連関論への応用まで扱う以上，現状の学生事情を鑑みて，産業連関論にとって優先度の低いものに時間をかけることはできない。幾何ベクトルおよびベクトル空間は本論の提案する授業内容には盛り込まないことにせざるをえない。

この 2008 年度の内容に基づいて，我々の提案する授業内容の導入部分（最初の６回分）の内容を以下にまとめておく。

１．行列の定義と演算
 (a) 行列の定義
 (b) 行列の和，差，定数倍，積，積の非可換性
 (c) 逆行列と正則性の定義，逆行列の例，逆行列を持たない例

２．連立１次方程式と行列の階数
 (a) ２元連立１次方程式で，唯一の解を持つ例，無限通りの解を持つ例，解を持たない例
 (b) 連立１次方程式を行列で表す方法，消去法と拡大係数行列に対する行基本操作
 (c) ３元連立１次方程式で，唯一の解を持つ例，無限通りの解を持つ例，解を持たない例をそれぞれ行基本操作で調べる
 (d) 連立１次方程式の解の調べ方を階数の概念を使ってまとめる
 (e) 基本行列を導入して，正方行列 A，B について $AB=I$ なら $B=A^{-1}$ を証明する。
 (f) 逆行列の計算法，階数最大と正則性の同値性

導入以後の方向付け －産業連関論をめぐって－

この章では，前章の内容に続きどのように産業連関論に向けた展開を加えて，授業内容案を完成させるかについて述べる。

波及効果分析

産業連関論における均衡産出高モデルは，A を投入係数行列，$\boldsymbol{x}$ を生産ベクトル，$\boldsymbol{c}$ を最終需要ベクトルとすると，

$$(I-A)\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c} \qquad (1)$$

と書ける（I は単位行列）。逆行列 $(I-A)^{-1}$ の存在を仮定すれば，

$$\boldsymbol{x}=(I-A)^{-1}\boldsymbol{c} \qquad (2)$$

と書ける。(1)式は生産ベクトルを与えたときそれが満たされるための需要ベクトルを求めるのに使われ，(2)式は需要ベクトルを与えたときそれを満たす生産ベクトルを求めるのに使われる。これらは，今では国レベルばかりではなく，都道府県レベルにおいて整備され，市レベルあるいは地域間においても用いられつつある産業連関表の主要な用途である波及効果分析における基本モデルである。

ここで，必要な数学的知識は，方程式(1)の非負可解性条件[1]（p.175）を除けば，行列の和差と積と逆行列の知識のみである。実際，水産大学校において，線形代数の授業において上式の簡単な応用を扱ったことが何度もある[9]。そのたびに経済・経営系の学生に限らず学生の関心が高いと感じられた。

以下は，2009 年度の授業で用いた連関表（物量表示）の例である。

Table 1. The Example of IO table which was used in Linear Algeba 2009

	農林水産業	工業	最終需要	生産額
農林水産業	50	45	5	100
工業	40	60	50	150

この表は内生部門が２つであるが，‘完結させるため’「その他」部門を加えて３部門にした年もあった。しかし学生の理解度は２部門の方がはっきりよい。形にこだわって欲張らない方がいいだろう。

経済・経営系学生を対象にするのであれば，さらに一般によく使われるとされる[13] モデル：

$$\boldsymbol{x}=\Big[I-(I-\hat{M})\,A\Big]^{-1}\Big[(I-\hat{M})\,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{e}\Big] \qquad (3)$$

などを扱ってもよいだろう。ここに，$\hat{M}$ は輸入係数を対角要素とし，非対角要素を０とする対角行列，$\boldsymbol{y}$ は国内最終需要，$\boldsymbol{e}$ は輸出である。

この波及効果分析は，前章の内容（６回）のすぐあとで扱い，２回かけることにする。15 回のうち前半８回分がここまでということになる。

産業連関論の理論的展開に向けて

後半７回では，応用として産業連関論に現れる均等付加価値率[1]（以下で詳しく紹介する）を取り上げたい。

これに必要な線形代数の基礎は，固有値・固有ベクトルである。

固有値・固有ベクトルで固有方程式を導くのに必要なのは，正方行列 A について，A が正則であることと $\det(A)\neq 0$ であることの同値性である。そこで行列式を導入することになるわけであるが，行列式は，順列からやっても，帰納的に定義しても，公理的に展開しても，詳細を示すこ

とで納得させようとすれば時間のかかる項目である。行列式は（行基本操作とは違って）例示による方法で一般性を理解させるのは難しい面がある。

そこで（2008，2009 年度の水産大学校における線形代数の授業で採った方法であるが），行列式を正則性を判定する式として以下のように手っ取り早く導入する方法を提案する。

すなわち，$a\neq 0$の場合で述べれば，２次の場合，

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{bmatrix}$$

という行基本変形から，Aが正則なのは，$ad-bc\neq 0$と同値であることが分かるから，$\det(A)=ad-bc$と定義する。３次のときは，

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ 0 & h-\frac{bg}{a} & i-\frac{cg}{a} \end{bmatrix}$$

という行基本変形から，Aが正則なのは，

$$\begin{bmatrix} e-\frac{bd}{a} & f-\frac{cd}{a} \\ h-\frac{bg}{a} & i-\frac{cg}{a} \end{bmatrix}$$

が正則であることと同値で，それは２次のときの行列式から

$$\left(e-\frac{bd}{a}\right)\left(i-\frac{cg}{a}\right)-\left(f-\frac{cd}{a}\right)\left(h-\frac{bg}{a}\right)\neq 0$$

のときで，この式のa倍を$\det(A)$とする。このように帰納的にAの行列式がAの正則性を判定する式として導入できる。

ここで，すでに行基本操作による正則性の調べ方をやっているので，その方法が生かされている。正則性は導入部分の主要テーマの一つでもあったので，正則性を判定できる式として行列式に興味を持たせることもできる。

行列式の一般的扱いは（提案した）行列式の定義のみにして，計算法は３次のサラスの方法があれば演習には十分だから，他の行列式の一般的性質は思い切って省略する（数値計算で固有値問題を解くのに固有方程式は使わないから行列式は低次の演習用で十分とも考えられる）。行列式の全容にはほど遠いが，行列式は，固有値・固有方程式の演習に必要な形にとどめて２回程度で済ます。

固有値・固有ベクトルに関しては，定義から固有方程式を導いて，２次と３次の固有値・固有ベクトルを求める例をいくつか取り上げる。行列式と固有値・固有ベクトルのここまでで，５回かける（2008，2009 年度実績でもある）。

あとは，固有値・固有ベクトルの応用として上で触れた均等付加価値率への応用に残り２回かけることになる。均等付加価値率について述べる前に，本論における線形代数の応用の扱い方に至った経緯について述べたい。

固有値・固有ベクトルの場合，なぜこういうものを考えるのかを理解させるのが難しい。とりあえず，線形変換が固有値・固有ベクトルによって簡潔に表現できることを示すのは効果があるようであるが，線形変換自体ほとんどやる暇がないので意味づけとしては不十分である。

2008，2009 年度は，固有値の応用としてそれぞれ，状態遷移行列[14),15)]と PageRank（2008 年度，２回），PageRank と産業連関論（2009 年度，３回）への応用をやった。（2008 年度までの授業は全学科向け開講。2009 年度は，水産流通経営学科単独開講。ただし，いずれも複数学科の高学年生の履修あり。）

PageRank[15)]は，検索エンジン Google に採用されたウェブページの評価基準である。

2008，2009 年度に限らず，固有値・固有ベクトルの意味を少しでもよく知ってもらうため，固有値・固有ベクトルの応用を複数扱った年度は多いが，いずれも学生における消化不良が見られた。近年とくにその傾向が強い。やはり，線形代数の初学者に対しては，応用はいろいろな例で幅広い理解を求めるより，線形代数を学ぶ動機付けとしての意味合いの方を重要視すべきかと思われる。

こういった経緯を踏まえて，本論では経済・経営系の学生を対象とするという視点から，固有値・固有ベクトルに限らず行列の応用を産業連関論に絞ることとした。

ここで提案する産業連関論への固有値・固有ベクトルの応用は，均等付加価値率[1)]を実現する価格ベクトルを求めるというもので，次のようなものである（津野の参考文献 p.195 以下による）。

物量表示の投入係数行列をAとし，価格ベクトルを$\boldsymbol{p}$，付加価値ベクトルを$\boldsymbol{v}$とおけば，均衡価格モデル

$$(I-{}^{t}A)\,\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}$$

が成立する（Iは単位行列）。ここで，j部門の付加価値率を

$$\gamma_j=\frac{\text{単位あたりの付加価値}}{\text{単位あたりの生産費用}}=\frac{v_j}{p_j-v_j}$$

と定める。部門によって付加価値率が異なると，付加価値率が大きい方に新たな参入が生じ産業構造が流動的になる。そこで付加価値率がすべての部門で等しくなる状況を考え，そのときの付加価値率を均等付加価値率という。均等付加価値率をγとおけば，$v_j=\gamma(p_j-v_j)$より，$(1+\gamma)v_j=\gamma p_j$だから，まとめて

$$\boldsymbol{v}=\frac{\gamma}{1+\gamma}\,\boldsymbol{p}$$

と書ける。これに均衡価格モデルを適用して，

$$(I-{}^{t}A)\boldsymbol{p}=\frac{\gamma}{1+\gamma}\boldsymbol{p}$$

これを整理して，

$${}^{t}A\boldsymbol{p}=\frac{1}{1+\gamma}\boldsymbol{p}$$

を得る。すなわち，均等付加価値率を実現させる価格ベクトル$\boldsymbol{p}$は${}^{t}A$の固有値$\frac{1}{1+\gamma}$に対する固有ベクトルである。

2009年度の授業では上述の波及効果分析もやらずにいきなりこの均等付加価値率を扱ったため，いささか唐突であったにもかかわらず，これまで扱ったことのある固有値・固有ベクトルの応用の中では一番学生の関心が高かった。波及効果分析も含め産業連関論への応用は学生の関心が高いということが改めて確認できた。

以上，前節の内容に続けて内容をまとめておくと，

3．産業連関論への応用１
- (a) 産業連関表について
- (b) 投入係数表と基本モデル
- (c) 輸出入を考慮したモデル

4．行列式
- (a) 正則性を判定する式としての行列式（２，３次）

5．固有値と固有ベクトル
- (a) 固有値・固有ベクトルの定義と固有方程式
- (b) ２，３次の計算例

6．産業連関論への応用２
- (a) 物量表示の産業連関表と価格ベクトル
- (b) 均等付加価値率を実現する価格ベクトル

まとめと考察

学生が最初に受講する線形代数の授業で応用を扱うことは，「はじめに」でも述べた通り望ましいことであるが日本では一般に行われておらず，チャレンジングな課題である。特に扱う題材を厳選することが重要との観点から，提案した授業内容の要点をまとめておく。

- 線形代数の基礎として，基本的かつ産業連関論に必要な題材として，連立方程式論と行列式と固有値・固有ベクトルに厳選する。ただし，行列式の理論には深入りしない。
- 厳選した題材は，平易なところから丁寧に解説する。
- 応用としては産業連関論に限定する。その理由として，波及効果分析に使う基本モデルは，行列の基本演算とその意味を理解するのにふさわしい題材であり，過去学生の受けもよい。また，均等付加価値率への応用は固有値の応用として動機付けの点でふさわしいと判断した。

  また，経済・経営系学科単独で開かれる線形代数の授業では，応用を産業連関論に限るのも問題ないと判断した。
- そもそも授業全体として（基礎と応用にわたって），たくさんのことを総花的にするより，相互に関連した事項に集中した方が内容消化の点でよいと判断した（特に近年の学生に対しては）。

本論で提示した授業内容は，15回のうち，基礎11回，産業連関論への応用４回となったが，学生が最初に取る線形代数の授業としてはこのぐらいのバランスがふさわしいと思う。応用としてはごく簡単な例しか挙げられないが，理解がしやすい分動機付けとしては適していると思う。

学生が最初に取る線形代数の授業においては，行列の基礎の習得に主眼をおくべきで，その方が将来の応用につながる。本格的な産業連関論への応用は，実践的なノウハウであれ，理論的な展開であれ，別の授業で行うのが適当であろう。

水産大学校水産流通経営学科においては現在，線形代数の授業は１つだけで，上記の内容に続くものはない。「はじめに」でとりあげた五つの提言の５番目によれば，数学科目の中で線形代数の２番目の授業の優先順位が高くあるべきというが，その授業内容とともに検討したい。

参考文献

1）津野義道, 経済数学Ⅱ 線形代数と産業連関論, 培風館,（1990）.

2）D.Carlson, et.al, The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra, The College Mathematics Journal, 24(1), 41-46（1993）.

3）Ed Dubinsky, Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level, Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, 85-106（1997）.

4）神永正博，学力低下は錯覚である，森北出版，(2008).

5）神永正博，工学部の数学教育，http://kaminaga-weyl.blogspot.com/2009/11/1.html，(2009).

6）鈴木秀一，線型代数の基礎と応用，培風館，(1995).

7）C.W.Curtis, linear algebra, Allyn and Bacon, (1974).

8）線形代数オンラインテキスト，http://d165.fish-u.

ac.jp/kk/2006LA/.

9）産業連関の簡単な例，http://d165.fish-u.ac.jp/kk/2006LA/node19.html.

10）楫取和明（D），青木邦匡（D），数式記述言語 MathML による数学問題データベースの活用，（水産大学校研究報告に投稿中）.

11）状態遷移行列の簡単な例，http://d165.fish-u.ac.jp/kk/2006LA/node20.html.

12）宮沢健一編，産業連関分析入門，日本経済新聞社，(1995).

13）総務省ホームページ / 産業連関分析について，http://www.stat.go.jp/data/io/bunseki.htm.

14）小島紀男，マトリクスとシステム，東海大学出版会，1990.

15）L.Page, S.Brin, R.Motwani, T.Winograd, The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the web, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.31.1768, (1999).