

Ekman傾斜流の発達過程と 地衡流近似の課題

安田秀一

Transient Ekman slope currents and significance of the geostrophic approximation

Hidekazu Yasuda

Abstract : Although the slope current under the Earth rotation effect has been well known at the steady state, the transient developing process of the slope current has not yet reported fully, and thus even the geostrophic current or wind is usually applied at the steady state only. This study has solved the time-dependent slope currents analytically and clarified the developing process from the initial stage. As shown in the previous paper¹⁾ in which the wind driven current has been reported changeable with the inertia period, it is revealed that the slope current is also grown with the inertia-periodical variation and that such variation is kept for a long duration. It might be a warning to the idea of the usual geostrophic current and wind with no consideration of the transient process.

Key words : slope current, Earth rotation effect, time-dependence, inertia current, geostrophic approximation

はじめに

海洋物理学に関する教科書の導入部分では、通常の流体力学との違いを明瞭にするため、Ekmanの吹送流²⁾から記述されることが多い。この吹送流は、螺旋状の空間的なホドグラフを形成するEkman境界層の存在が特徴的で、海洋学や水産学の研究者には常識といえるほど広く知られている。この流れは、19世紀末にNorwayの探検家Fridtjof Nansen (ナンセン採水器の考案者) の北極海探検で観測され、流れによって氷塊が風向から20°~50°程度右偏していたことを報告した。Nansenは、その原因解明を流体力学の権威であったVilhelm Bjerknesに依頼し³⁾、彼は弟子であった海洋物理学者Vagn Walfrid Ekmanにこのテーマを与えた。新進気鋭のEkmanは、地球自転効果(Coriolis力)と渦動粘性係数の概念を導入することで、簡単な微分方程式を解いて見事にその依頼に応えた²⁾。その解析は、主に水深が無限に深く時間的な変動を無視した定常状態を仮定しており、その結果、風応力に接する海面上では流れは風向から右側に45°偏向し、海面から深くなるに従って流れ

はさらに右回りに偏向しながら(ただし右偏は北半球の場合) Ekman螺旋を形成するとした。この流れを鉛直方向に積分すると体積輸送が得られ、その輸送量は風向から直角右方向に運ばれる(Ekman輸送)という、すっきりとわかりやすい提示であった。わかりやすかったことから、風が吹けば水は右に輸送されるということが、海洋学や水産学の多くの研究者らによるデータの解釈や現象の説明などに安易に利用されたため、風による影響は定常状態のものが適用され^{4), 5)}、そのことが海洋環境研究の進歩を阻害してきたのではないかとさえ思われる。実際、Ekman自身も定常状態に重きを置いたことで、海面で45°右偏することは説明したものの、20°~50°程度の右偏のゆれ幅については言及していない。

自然現象を解析するときに、まず定常状態のバランスを調べることは、本質を把握する上で大事なことも知れないが、定常解は飽くまでも概念的なもので、自然現象は常に変動しており、その理解のためには発達段階の非定常な過程を知ることは不可欠と考える。著者は、周防灘などの観測データの理解のために、時間変動を念頭に吹送流を解

析し、実際の流れには慣性運動が含まれ、一般的に知られている定常解は、慣性周期で平均した算術上の現象であることを示した¹⁾⁶⁾。支配方程式の非定常項を無視した定常解と、非定常項を考慮して発達段階からの解が経過時間と共に収束したときは必ずしも同等とはいえないことも提示した。Ekmanは吹送流と共に傾斜流も解析し²⁾、この場合には水底にEkman螺旋が形成され、水底から離れた上層では海面傾斜の直角右方向に流れが生成されるとした。このことは、地衡流や地衡風として海洋学や気象学でも上層に着目した形で取り入れられているが、吹送流の場合と同様に傾斜流においても時間変動を考慮した解析が必要なのではないと思われる。つまり、気圧配置が示されたときに、大気は等圧線に沿って流れるということが天気予報などでも当然のように気象予報士らによって述べられるが、その時に、運動方程式に現れる非定常項の要素はほとんど含まれてはいない。著者は水産大学校に教授として在任中、応用物理学と海洋環境学の物理を担当したことから、自然現象における定常解の意味の説明に困り、机上のことではなく実際の現象の解釈のためには非定常項の役割を考慮することは無視できないとした。そのことから安田¹⁾において、流体力学と解析学の基本的な知識から、Ekmanも明瞭に述べることのなかった発達期の吹送流を解析的に得られることを示した。海洋物理学の古典的な教科書^{7),8)}においても定常状態の記述が中心となって、特に、傾斜流に関しては、時間依存性についてほとんど触れられていない。本誌が教育機関の研究報告ということもあり、海洋科学に関心のある学生のポテンシャルをさらに高めていただきたいの思いもあって、古典的な教養程度の応用数学を活用することで、これまで明らかにされることのなかった自然現象の一端に触れることもできることを紹介しようとするものである。

傾斜流の解析

海面が傾斜することによってその方向に力が生じるが、その力によって引き起こされる流れのことを傾斜流といい、流体力学の運動方程式の中の圧力勾配項が起動力(圧力勾配力)となって生成される。海面傾斜の影響は海水の密度構造によって海底まで届かないことがあるが、本報では、密度構造は一様とし海面傾斜の影響が鉛直的に変化しない場合を取り扱う。海洋物理学において海水の流動を考えると、地球自転効果を無視することはほとんどありえ

ないが、自転効果を明らかにして本研究内容の理解を深めるためには、自転効果がないときの傾斜流の振舞いも知る必要があると考える。本章の“傾斜流の解析”では、最初に自転効果がない場合の傾斜流の発達過程を明らかにし、その次に、海洋を想定して自転効果を考慮した場合の傾斜流の発達過程やそれに伴う体積輸送量の振舞いを示し、さらに補足的に、傾斜が時間的に変動するときの傾斜流を解析する。

自転効果がない慣性系における傾斜流の発達

吹送流の場合も自転効果がない場合は、風と同じ方向に流れも引き起こされるが¹⁾、傾斜流の場合も流れは傾斜の方向に引き起こされると考えてよいだろう。ここで、水平方向の地形の影響や変動は無視して、海面傾斜がx方向に形成された場合を検討する。海水の密度 ρ は一様とし、粘性係数は水平方向(x-y面)の変動は無視したことから鉛直方向のみで、これも一定値で μ とすると、流れを支配する運動方程式は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

ここで u はx方向の流れの速度、 t は経過時間で p は圧力、 z は平均海面を0としたときの鉛直下向き座標である。海面昇降量(変位)を η 、重力加速度を g とすると、右辺第1項の圧力勾配項は、連続の条件を前提に $-g \partial \eta / \partial x$ のように海面傾斜に置き換えることができる。この式は圧力勾配によって流れが加速するが、粘性によって加速にブレーキが掛かっていることを表している。流れを引き起こす圧力勾配はここでは一定値とし、時間的に変化する場合の後で検討する。流れを制御する境界条件は、海面($z=0$)で応力0、海底($z=h$)では摩擦によって流速0とし、初期条件は静止状態にあるとする。このことを式で表すと次のとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (z=0), \quad u = 0 \quad (z=h), \quad u = 0 \quad (t=0) \quad (2)$$

式(1)は圧力勾配項を生成源とする非斉次の熱伝導方程式と同様であるが、解の導出に際しては、前報¹⁾などの解析手法を引き継いで、静止状態からの発達過程の解 $u(z, t)$ は定常解 $u_s(z)$ から減衰解 $u_d(z, t)$ を引いたもの、つまり、 $u(z, t) = u_s(z) - u_d(z, t)$ に等しいとして解析する。この関係式を(1)に代入することによって、定常解と減衰解に関わる方程式

は、それぞれ次のように表すことができる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u_d}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_d}{\partial z^2} \quad (3), (4)$$

なお、両式の境界条件は(2)と同じで、(4)の初期条件は(3)の解、つまり、 $u_d(z, 0) = u_s(z)$ で、減衰解とは、定常状態の流れが突然に生成源を消失した場合の解を意味している。

(3)の解は、Hagen-Poiseuilleの解と呼ばれているもので次のとおりである。

$$u_s(z) = \frac{F}{2\nu} (h^2 - z^2) \quad (5)$$

ただし、 F は(3)の圧力勾配項 $-1/\rho \cdot \partial p/\partial x$ で流れの駆動力に相当し、 ν は μ/ρ のことである。

(4)の一般解は、安田¹⁾で示したように、変数分離法から $u_d(z, t) = \exp(-\nu \alpha_n^2 t)(C_1 \cos \alpha_n z + C_2 \sin \alpha_n z)$ の形で求めることができる。 C_1 と C_2 は積分定数で、海面 $z = 0$ での条件より $C_2 = 0$ で、海底 $z = h$ の条件から $\cos \alpha_n h = 0$ で $\alpha_n h = (2n + 1)\pi/2$ 、ただし n は $0, 1, 2, 3, \dots$ のような正の整数である。このことから $u_d(z, t)$ は次のように書き改めることができる。

$$u_d(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-\nu \alpha_n^2 t) \cos \alpha_n z, \quad \alpha_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad (6)$$

積分定数 B_n は $u_d(z, t)$ の初期条件が(5)であるとして求められる。つまり

$$u_d(z, 0) = u_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \alpha_n z = \frac{F}{2\nu} (h^2 - z^2) \quad (7)$$

として次のようになる。

$$B_n = \frac{2}{h} \int_0^h \frac{F}{2\nu} (h^2 - z^2) \cos \alpha_n z dz = \frac{2F}{\nu} \frac{\sin \alpha_n h}{\alpha_n^3 h} \quad (8)$$

自転効果がない場合の発達過程の傾斜流は、(6)と(7)から次のように導くことができる。

$$u(z, t) = u_s(z) - u_d(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n [1 - \exp(-\nu \alpha_n^2 t)] \cos \alpha_n z \quad (9)$$

吹送流の自転効果がない場合と比較すると、海面での駆動力を風からの応力 T_0 、つまり $-\mu \partial u/\partial z = T_0$ ($z = 0$)であるとすると、式(9)中の B_n を次のような B_n' に置き換えればよい¹⁾。

$$B_n' = \frac{2T_0}{h\nu\alpha_n^2} \quad (10)$$

ちなみに、(10)の B_n' を求めるための吹送流の定常解 $u_w(z)$ は次のとおりであった。

$$u_w(z) = \frac{T_0}{\nu} (h - z) \quad (11)$$

初期から発達過程にある傾斜流と吹送流の鉛直構造の変化をFig. 1の(a)と(b)にそれぞれ描いた。両図とも発達段階は h^2/ν [鉛直的な分布がほとんど定常状態になるとされる代表時間]の1/30毎の鉛直分布を描いている。流れの速度は、それぞれ $Fh^2/2\nu$ と T_0h/ν で無次元化している。(a)の傾斜流の場合は、海底からの境界層(シア領域)が徐々に発達し定常段階ではHagen-Poiseuille流に収束し、(b)の吹送流は海面からの境界層が徐々に発達してCouette流に収斂していく様子が示されている。ちなみに両図の太くて色の薄い実線が定常状態のもので、無次元化したパラメータにより、両流れとも海面の値は1.0である。

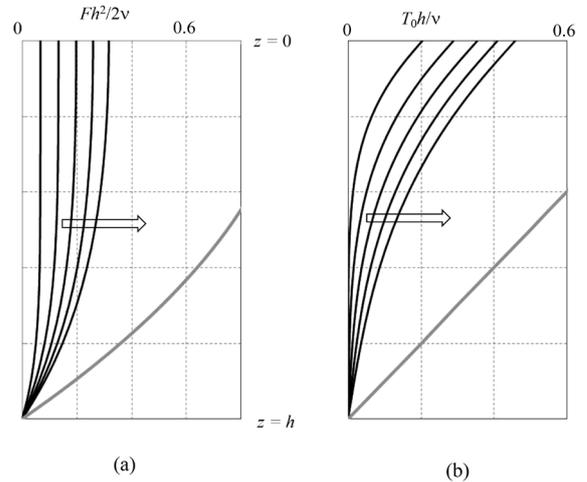


Fig. 1. Growing process of two typical currents with no Coriolis effect. (a) Transient slope current normalized by $Fh^2/2\nu$ and (b) wind-drift current normalized by T_0h/ν . In each figure, five thin solid lines show the vertical profiles at every $h^2/30\nu$ from the initial state and a bold light line is the steady state.

自転効果がある回転系の場合の傾斜流

本節では、前節の慣性系における傾斜流が自転効果によってどのように変形し生成されていくかを調べる。ここでも流れの鉛直構造に着目して、水平方向(x-y面)の地形の影響や変動は無視する。また、海水の密度 ρ も一様とし、海面傾斜の影響は海底まで一様に生じるものとする。粘性係数は鉛直方向の μ のみでこれも一定値として、以上のことから流れを支配する運動方程式は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (11), (12)$$

自転効果を考慮したことで、コリオリパラメータ f で表されるコリオリ項がそれぞれの左辺第2項に入っている。式(11)と(12)は、運動方程式の x 方向と y 方向の成分で、 z 軸は鉛直下向きとする。ここでは海面傾斜は y 方向に形成されるとし、そのことは式(12)の右辺第1項の圧力勾配項で表されている。前節のようにこの圧力勾配項は $-g \partial \eta / \partial y$ のように海面傾斜に対応している。境界条件は、海面 ($z = 0$) では風の応力はないとして $\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$ 、海底 ($z = h$) では摩擦によって $u = v = 0$ であるとする。(11)と(12)を解くために実数軸を x 方向、虚数軸を y 方向とする水平速度ベクトル $W(z, t)$ を導入する。つまり、 $W(z, t) = u(z, t) + iv(z, t)$ で、運動方程式(11)、(12)は、まとめて次のように書き改めることができる。

$$\frac{\partial W}{\partial t} + ifW = iF + v \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (13)$$

F , v , i はそれぞれ $1/\rho \partial p / \partial y$, μ/ρ , $(-1)^{1/2}$ である。境界条件は $z = 0$ で $\partial W / \partial z = 0$, $z = h$ で $W = 0$ と表すことができ、初期条件は $t = 0$ で $W = 0$ ということになる。

(13)は右辺第1項に非齊次項があり、左辺第2項のために置換によって単純に消すこともできないので、前節のように、初期条件を静止状態とした解は、定常解 $W_s(z)$ から減衰解 $W_d(z, t)$ を引いた解に等しいとして、解きやすい $W_s(z)$ と $W_d(z, t)$ を求め、 $W(z, t) = W_s(z) - W_d(z, t)$ の関係から $W(z, t)$ を得るという手法をとる。因みに、ここで述べる減衰解とは、前節と同様、与えられた海面傾斜によってバランスしている定常状態の傾斜流が、突然に海面傾斜がなくなった場合に減衰する流れを示している。定常解 $W_s(z)$ と減衰解 $W_d(z, t)$ に関わるそれぞれの運動方程式と境界条件等は、 $W(z, t) = W_s(z) - W_d(z, t)$ の関係式を(13)に代入することによって、次のように書き表すことができる。

$$ifW_s = iF + v \frac{\partial^2 W_s}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial W_s}{\partial z} = 0 (z=0), \quad W_s = 0 (z=h) \quad (14)$$

$$\frac{\partial W_d}{\partial t} + ifW_d = v \frac{\partial^2 W_d}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial W_d}{\partial z} = 0 (z=0), \quad W_d = 0 (z=h),$$

$$W_d(z, 0) = W_s(z) \quad (15)$$

(14)の定常状態を表す運動方程式は、 iF を非齊次項とした二階常微分方程式で、境界条件を考慮することによって次のように求めることができる。

$$W_s(z) = \frac{F}{f} \left[1 - \frac{\cosh(1+i)\beta z}{\cosh(1+i)\beta h} \right] \quad \text{ただし} \quad \beta = \sqrt{\frac{f}{2v}} \quad (16)$$

β の逆数はEkman境界層の代表寸法で、その π 倍の厚さが摩擦影響深度と呼ばれて、定常状態における実質的な

Ekman境界層とされている。各方向に成分表示すると、Ekman²⁾が求めたように、(16)は次のように分解される。

$$\begin{aligned} u_s(z) &= \frac{F}{f} \left[\frac{\cosh \beta(h+z) \cos \beta(h-z) + \cosh \beta(h-z) \cos \beta(h+z)}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h} \right] \\ v_s(z) &= \frac{F}{f} \left[\frac{\sinh \beta(h+z) \sin \beta(h-z) + \sinh \beta(h-z) \sin \beta(h+z)}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

(15)の減衰解は、解法を容易にするため、 $W_d(z, t) = X(z, t) \exp(-ift)$ の変換を行うことで、左辺第2項のコリオリ項は消去されて次のように簡略化される。

$$\frac{\partial X}{\partial t} = v \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \quad (18)$$

この方程式は上記の変換を行ったことから自転効果がない場合の、式(4)と同等の運動方程式で、その一般解は変数分離法によって次のように導くことができる¹⁾。

$$X(z, t) = \exp(-v\alpha^2 t) (C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z) \quad (19)$$

自転効果を考慮した解 $W_d(z, t)$ は、 $\exp(-ift)$ を乗じることで次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} W_d(z, t) &= X(z, t) \exp(-ift) = \\ &\exp\{-(v\alpha^2 + if)t\} (C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z) \end{aligned} \quad (20)$$

積分定数 C_3 と C_4 は、 z に関わる境界条件が(6)を導いたときと同様で、 $C_4 = 0$ であり、 α は $(2n+1)\pi/2h$ [$n = 0, 1, 2, 3, \dots$] であることから $\alpha_n = (2n+1)\pi/2h$ とし、境界条件を考慮した解 $W_d(z, t)$ は次のように表すことができる。

$$W_d(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp\{-(v\alpha_n^2 + if)t\} \cos \alpha_n z \quad (21)$$

ここに未定の積分定数 D_n は、前節同様、 $t = 0$ における初期条件から導き出せる。

$$\begin{aligned} W_d(z, 0) = W_s(z) &= \frac{F}{f} \left[\frac{\cosh(1+i)\beta h - \cosh(1+i)\beta z}{\cosh(1+i)\beta h} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \alpha_n z \end{aligned} \quad (22)$$

D_n はFourier級数の係数であることから、少し複雑であるが何とか積分することができる。

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2}{h} \frac{F}{f \cosh(1+i)\beta h} \int_0^h [\cosh(1+i)\beta h - \cosh(1+i)\beta z] \cos \alpha_n z dz \\ &= \frac{2F}{hf\alpha_n} \left[\sin \alpha_n h - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \{(1+i)\beta\}^2} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sin \alpha_n h + \frac{(1+i)\beta}{\alpha_n} \tanh(1+i)\beta h \cos \alpha_n h \right\} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$D_n = D_{nr} + iD_{ni}$ として実部 D_{nr} と虚部 D_{ni} に分解すると、そ

それぞれ次のように書き表される。

$$D_{nr} = \frac{2F}{\alpha_n h f} \left[\sin \alpha_n h - \frac{\cos \alpha_n h \left(\frac{2\alpha_n^4 \beta (\sinh \beta h \cosh \beta h - \sin \beta h \cos \beta h)}{4\alpha_n^2 \beta^3 (\sinh \beta h \cosh \beta h + \sin \beta h \cos \beta h)} + \alpha_n^4 \sin \alpha_n h \right)}{\alpha_n (\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h)} \right]$$

$$D_{nl} = \frac{2F}{\alpha_n h f} \left[\frac{\cos \alpha_n h \left(\frac{4\alpha_n^2 \beta^3 (\sinh \beta h \cosh \beta h - \sin \beta h \cos \beta h)}{-2\alpha_n^4 \beta (\sinh \beta h \cosh \beta h + \sin \beta h \cos \beta h)} + \alpha_n^2 \beta^2 \sin \alpha_n h \right)}{\alpha_n (\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h)} \right] \quad (24)$$

D_n が明らかになったことで発達過程にある傾斜流 $W(z, t)$ は次のように表すことができる。

$$W(z, t) = W_s(z) - W_d(z, t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \alpha_n z - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2 + if)t\right\} \cos \alpha_n z \quad (25)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2 + if)t\right\} \right] \cos \alpha_n z$$

成分分解して表示すると、それぞれの流速成分は次のとおりである。

$$u(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_{nr} \left\{ 1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2)t\right\} \cos ft \right\} - D_{nl} \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2)t\right\} \sin ft \right] \cos \alpha_n z$$

$$v(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[D_{nl} \left\{ 1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2)t\right\} \cos ft \right\} + D_{nr} \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2)t\right\} \sin ft \right] \cos \alpha_n z \quad (26)$$

ちなみに、前報等^{1), 6)}で解析した発達段階の吹送流 $W_{wind}(z, t)$ も

$$W_{wind}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left[1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2 + if)t\right\} \right] \cos \alpha_n z \quad (25')$$

のように導くことができたが、フーリエ係数 E_n が異なるだけで解の形は同様であることを申し添えておく。ただしその時のフーリエ係数は、 T_0 を海面での風の応力として $E_n = 2T_0/h(if + \nu \alpha_n^2)$ であった。

傾斜流の体積輸送

流れを海底から海面まで積分したものを体積輸送量 Volume transport というが、吹送流の場合には、北半球では風が吹けば海水は右方向に輸送されるとして、海洋環境の解説においても説明されることが多くの場面で見受けられた。前報⁶⁾では、体積輸送は浅い海域ではやや右に向かうことはあってもほとんど風下に向かい、深い海域では長時間風が吹き続けても体積輸送は安定して右方向に向かうわけではなく慣性円運動が強く残り、慣性周期 T_p ($2\pi/f$ に相当し日本周辺では21~22時間)で平均した時間平均値が右に向かうことを示した。ここでは、傾斜流の場合の体積輸送について、新たな求め方も交えて提示する。

まず、傾斜流の解(25)に基づいて、発達過程にある体積輸送 $S(t)$ は、海面から海底まで鉛直積分して次のように導くことができる。

$$S(t) = \int_0^h W(z, t) dz = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2 + if)t\right\} \right] \int_0^h \cos \alpha_n z dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[1 - \exp\left\{-(\nu \alpha_n^2 + if)t\right\} \right] \frac{(-1)^n}{\alpha_n} \quad (27)$$

その x 方向成分と y 方向成分をそれぞれ $U(t)$ と $V(t)$ で表すと次のように導かれる。

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [D_{nr} \{1 - \exp(-\nu \alpha_n^2 t) \cos ft\} - D_{nl} \exp(-\nu \alpha_n^2 t) \sin ft] \frac{(-1)^n}{\alpha_n}$$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [D_{nl} \{1 - \exp(-\nu \alpha_n^2 t) \cos ft\} + D_{nr} \exp(-\nu \alpha_n^2 t) \sin ft] \frac{(-1)^n}{\alpha_n} \quad (28)$$

つまり、 $S(t) = U(t) + iV(t)$ で、時間が十分に経過した場合の定常値は、 $\exp(-\nu \alpha_n^2 t) \rightarrow 0$ より、次のようになる。

$$U_{t \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{nr}}{\alpha_n}, \quad V_{t \rightarrow \infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{nl}}{\alpha_n} \quad (29)$$

上式の D_n は(23)と(24)に示したように複雑なフーリエ係数でわかりにくいことから、前報1)の吹送流の場合と同様に解を簡略化するために、運動方程式(13)を鉛直方向に積分した体積輸送 $S(t)$ に関する方程式から求めてみる。その方程式は境界条件を考慮して次のように表される。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + ifS = iFh - RS; S = 0 (t = 0) \quad (30)$$

粘性項の積分に際して、海面での境界条件は応力0でよいが、海底での応力は流れの強さによって変動することから簡単に表すことはできない。ここでは最も簡単な形で鉛直平均流速の一次に比例する摩擦を仮定して、その摩擦係数を R とした。(30)は iFh を非斉次項とする一階常微分方程式で、解 $S(t)$ は次のように求めることができる。

$$S(t) = \frac{Fh}{R^2 + f^2} (f + iR) [1 - \exp\{-(if + R)t\}] \quad (31)$$

成分分解すると次のとおりである。

$$U(t) = \frac{Fh}{R^2 + f^2} [f \{1 - e^{-Rt} \cos ft\} - R e^{-Rt} \sin ft]$$

$$V(t) = \frac{Fh}{R^2 + f^2} [R \{1 - e^{-Rt} \cos ft\} + f e^{-Rt} \sin ft] \quad (32)$$

時間が経過して定常状態に達すると $S(t \rightarrow \infty) = Fh(f + iR)/(R^2 + f^2)$ となり、(29)に対応する各成分の解は次のようになる。

$$U_s = \frac{Fh}{R^2 + f^2} f, \quad V_s = \frac{Fh}{R^2 + f^2} R \quad (33)$$

添字 s は時間が十分に経過して定常値になったことを示す。

みに水深が大きくなって摩擦の影響が見られない場合には、 $R = 0$ となって鉛直平均流速 $W_A (= u_A + iv_A)$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} u_A(t) &= \frac{F}{f}(1 - \cos ft) \\ v_A(t) &= \frac{F}{f}\sin ft \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、体積輸送量とすると、 h が無限大となるので便宜的に鉛直平均値を用いているが、(34)は、時間が経過して $t \rightarrow \infty$ となっても慣性周期変動が消えることなく定常状態がないことを表している。

本報告は、導入部でも述べたように、学生の応用数学演習も念頭に著していることから、演習問題の一つとして、上記の定常値について、式(14)をもとに、フーリエ級数と摩擦係数 R を使わないで別の手順で求める方法を記す。まず、定常状態を示す運動方程式(14)を鉛直的に積分すると次のような方程式を得ることができる。

$$if S_s = iFh + v \left. \frac{\partial W_s}{\partial z} \right|_{z=0} - v \left. \frac{\partial W_s}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (35)$$

右辺第2項は、海面で応力を受けないということから0で、この式は次のように書き換えられる。

$$S_s = U_s + iV_s = \frac{Fh}{f} + i \left. \frac{v \partial W_s}{\partial z} \right|_{z=h} \quad (36)$$

成分で分けると

$$U_s = \frac{Fh}{f} - \frac{v \partial v_s}{f \partial z} \Big|_{z=h}, \quad V_s = \frac{v \partial u_s}{f \partial z} \Big|_{z=h} \quad (37)$$

であり、海底における応力は(17)を z で微分することから求めることができ、体積輸送量は次のように表すことができる。

$$U_s = \frac{Fh}{f} \left[1 - \frac{1}{2\beta h} \frac{\sinh 2\beta h + \sin 2\beta h}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h} \right], \quad V_s = \frac{Fh}{f} \left[\frac{1}{2\beta h} \frac{\sinh 2\beta h - \sin 2\beta h}{\cosh 2\beta h + \cos 2\beta h} \right] \quad (38)$$

話が逸れるが、水平二次元の数値シミュレーションにおいては速度に比例する摩擦を取り入れることもあるが、摩擦係数の根拠は曖昧と聞いている。(33)は Fh/f で括弧することができることから、(33)と(38)を比較することにより、相対摩擦係数 R/f と海域の水深 βh の関係を、大雑把かもしれないが対応づけられることを書き添えておく。

傾斜が時間変動する場合の傾斜流

前節は傾斜が突然に与えられた場合の傾斜流の反応を解いたが、吹送流の場合⁶⁾と同様に、本節では、駆動力が時間的に変動する場合として、傾斜が徐々に形成される場合

と潮汐のように振動する場合の解析を試みる。

前記のように F が一定の場合の解を $W(z, t)$ とすると、傾斜による駆動力 F を時間変動する $F_0 p(t)$ と表した場合の解 $W_i(z, t)$ は、微分方程式の教科書に記載されているDuhamelの定理を適用して次のような微分と積分で導くことができる。なお、 F_0 は定数である。

$$W_i(z, t) = \int_0^t \frac{\partial W(z, t-t')}{\partial t'} p(t') dt' \quad (39)$$

まず、傾斜が徐々に形成される場合として、駆動力を $F(t) = F_0[1 - \exp(-kt)]$ の形で与えると、 $W_i(z, t)$ は具体的に次のように表すことができる。

$$W_i(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[\frac{v\alpha_n^2 + if}{v\alpha_n^2 + if - k} \left\{ \exp\left[-(v\alpha_n^2 + if)t\right] - \exp\{-kt\} \right\} - \left\{ \exp\left[-(v\alpha_n^2 + if)t\right] - 1 \right\} \cos \alpha_n z \right] \quad (40)$$

ただし k は、定常値に至るまでの速さに関わる定数である。時間が十分に経過した場合には、(40)は次のように(22)と同様な流れに収束する。

$$W_i(z, t \rightarrow \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \alpha_n z \quad (40')$$

津波のような長波は、傾斜が時間的に振動する場合と考えることができ、 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ で与えると、その時の流れの解は次のように導かれる。

$$W_i(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{v\alpha_n^2 + if}{(v\alpha_n^2 + if)^2 + \omega^2} \left[(v\alpha_n^2 + if) \sin \omega t + \omega \left\{ \exp\left[-(v\alpha_n^2 + if)t\right] - \cos \omega t \right\} \right] \cos \alpha_n z \quad (41)$$

さらに時間が十分に経過したときには、潮汐波による潮流のように振動現象が連続的に生じている場合の解に相当することになる。ちなみに、その時の解 $W_{is}(z, t)$ は次のようになり、 $\exp(-ift)$ で表される慣性円運動は、 $\exp(-v\alpha_n^2 t)$ によって減衰消失している。

$$W_{is}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{v\alpha_n^2 + if}{(v\alpha_n^2 + if)^2 + \omega^2} \left[(v\alpha_n^2 + if) \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right] \cos \alpha_n z \quad (42)$$

1980年代には自転効果があるときの潮流楕円について解析した報告が出されている^{9,10,11)}が、Yasuda¹¹⁾では潮汐振動を仮定した正規モード法で潮流楕円の鉛直分布を導き、自転影響下の潮流楕円の振舞いを調べている。解(42)は、その時の水平地形が影響しない場合の潮流楕円の鉛直分布に対応させることができる。また、起動力が途切れることなく延々と続く潮汐力である場合には、(42)のように慣性円運動は見られないが、前報⁶⁾でも述べたように、何らかの要因で流れが誘発される現象が生じたときには、必ず慣性円運動が生じることがここでも示された。

傾斜流の解曲線

自転効果影響下における傾斜流の特徴の理解を深めるために、前章で求めたそれぞれの解を図式化する。まず、Fig. 2に水深が $h = 10\beta^{-1}$ [実質的なEkman境界層厚(摩擦影響深度)の約3倍]の海域における定常段階、つまり、(17)による鉛直分布を描く。海面傾斜が y 方向であるにも関わらず、境界層外の上層では x 方向に流れ、地衡流の様相を呈していることがわかる。海底近くのEkman層内では y 方向成分も生成され、Ekman螺旋によって、底層では上層に比べて左向きの流れが生じていることになる。なお、この図以降の流れの速度は F/f で無次元化している。

Fig. 3とFig. 4には、同じく水深が $h = 10\beta^{-1}$ の場合の、発達過程にある傾斜流の各方向成分の鉛直分布を、初期から慣性周期 $T_p (= 2\pi/f)$ の1/12の時間毎に描いた。Fig. 3が x 方向成分で、(a)の①から⑥は初期から $t = T_p/2$ までで、(b)の⑦から⑫が後半の $t = T_p$ までを表している。Fig. 4は y 方向成分で、番号順に、(a), (b), (c)に初期から同じ時間間隔で描いた。両図とも⑫が初期からの1慣性周期目でFig. 4(c)の⑬は1慣性周期を越えて $t = 5T_p/4$ の鉛直分布である。海面傾斜力 F は y 方向に与えているが、この図によると、その方向には往復運動が窺えるものの、 x 方向には往復運動をしながらも全体的に正の方向に流れが偏っていることがわかる。この初期段階においても、最初の1慣性周期で時間平均するとFig. 2の定常状態に非常に近く、周期平均値は非常に速い段階で定常状態の鉛直分布に達している。

発達の過程を別の角度から見るために、Fig. 5には、全水深 h が前図などと同じ $10\beta^{-1}$ の海域における深度毎の流速ベクトルのホドグラフを示す。図中の(a)から(e)まで、海面 [$z' (= h - z) = 10\beta^{-1}$]、摩擦影響深度 [$z' = \beta^{-1}\pi$]、海底近傍 [$z' = \beta^{-1}, 0.5\beta^{-1}, 0.2\beta^{-1}$]の各層のもので、 $T_p/24$ 毎にマーカーを入れて $t = 10 T_p$ までの発達過程を表している。ちなみに横軸が x 方向成分で縦軸が y 方向成分である。当然のことながら定常値はFig. 2に収斂するが、吹送流の場合と同様に定常状態に至るまで、定常値と同程度の大きさの慣性円運動が長く維持されて消えにくいことを示している。

Fig. 6は、(28)で表される平均流速 [体積輸送量を水深で割った値]の発達過程を水深の異なる海域毎にホドグラフにしたものである。図中の h^* はEkman境界層厚(β^{-1})で無次元化した海域の全水深 βh のことで、 $h^* = 20$ [摩擦影響深度 $\pi\beta^{-1}$ の約6倍]、 $h^* = 10$ 、 $h^* = \pi$ 、 $h^* = 1$ までのものを、

前図と同様に $T_p/24$ 毎にマーカーを入れて $t = 10T_p$ までを描いた。座標軸の数値は体積輸送量を水深で割って鉛直平均流速で表している。Fig. 5は $h^* = 10$ の海域の各層のホドグラフを描いたものであるが、この鉛直平均がFig. 6の(b)に相当する。前報の吹送流の場合⁹⁾には、体積輸送のほとんどは上層のEkman層内に留まっていたが、傾斜流の場合には海底のEkman層上部の全水深に流れが引き起こされて、慣性円運動も全水深的に生じてダイナミックな運動となっているが、慣性円運動が回転系で観測したことによる見かけの運動であることも物理的には理解しておかなければならない。

傾斜力 F が時間的に変動する場合には、パラメータが多いこともあって、ここでは図は省略するが、簡単に書き添えると、(40)については、発達過程は h の値に依存して遅くなるものの、時間の経過とともに F を一定値で与えた場合と同様になり、傾斜力が振動する場合は、Yasuda¹¹⁾の自転影響下の潮流の中で定常段階の挙動を詳しく記している。

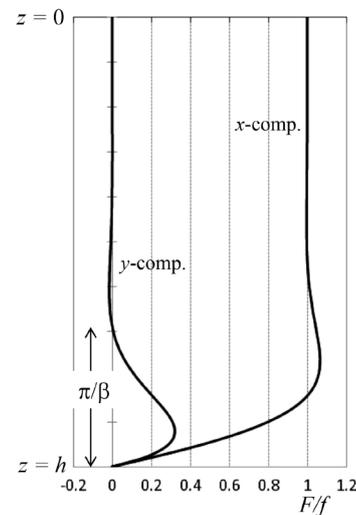


Fig. 2. The vertical profile of the slope current with the Coriolis effect at the stationary stage in the basin the whole depth of which is $h = 10 \times \beta^{-1}$.

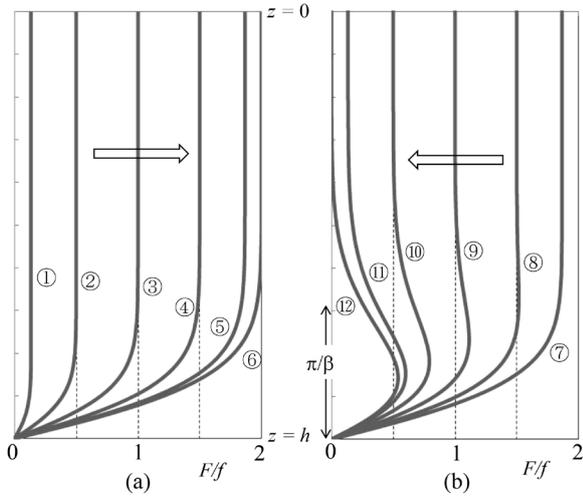


Fig. 3. Development of the vertical profiles of the *x-directional* slope current during the initial stage in the basin of $h = 10\beta^{-1}$ (or $h^* [= \beta h] = 10$). The time interval of each vertical profile is $T_p/12$. (a) from the initial to $t = T_p/2$ and (b) from $t = 7T_p/12$ to $t = T_p$.

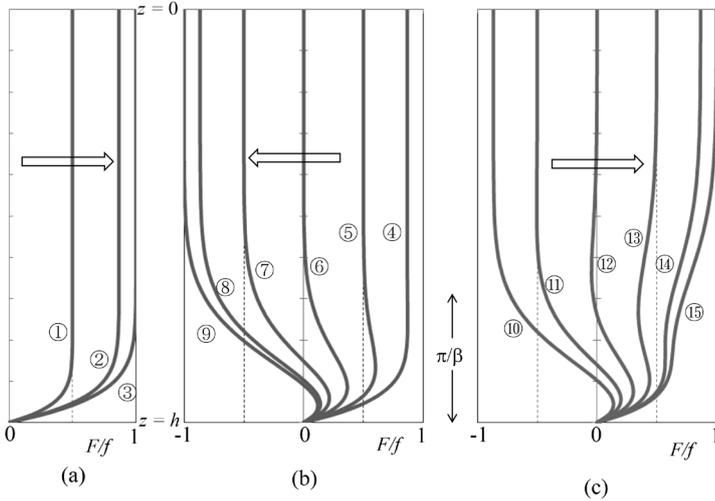


Fig. 4. The vertical profiles of the *y-directional* slope current in the same case as Fig. 3. (a) from the initial to $t = T_p/2$, (b) from $t = 7T_p/12$ to $t = T_p$ and (c) from $t = 13T_p/12$ to $t = 3T_p/2$.

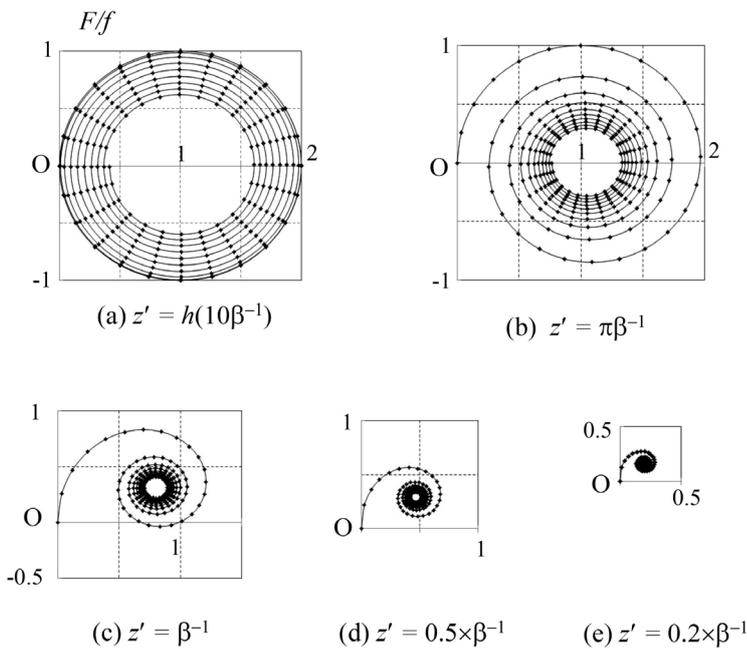


Fig. 5. Hodographs of the transient slope current from the initial at (a) the sea surface ($z' = h$), (b) the friction depth ($z' = \pi\beta^{-1}$), (c) $z' = \beta^{-1}$, (d) $z' = 0.5\beta^{-1}$ and (e) near the sea floor $z' = 0.2\beta^{-1}$.

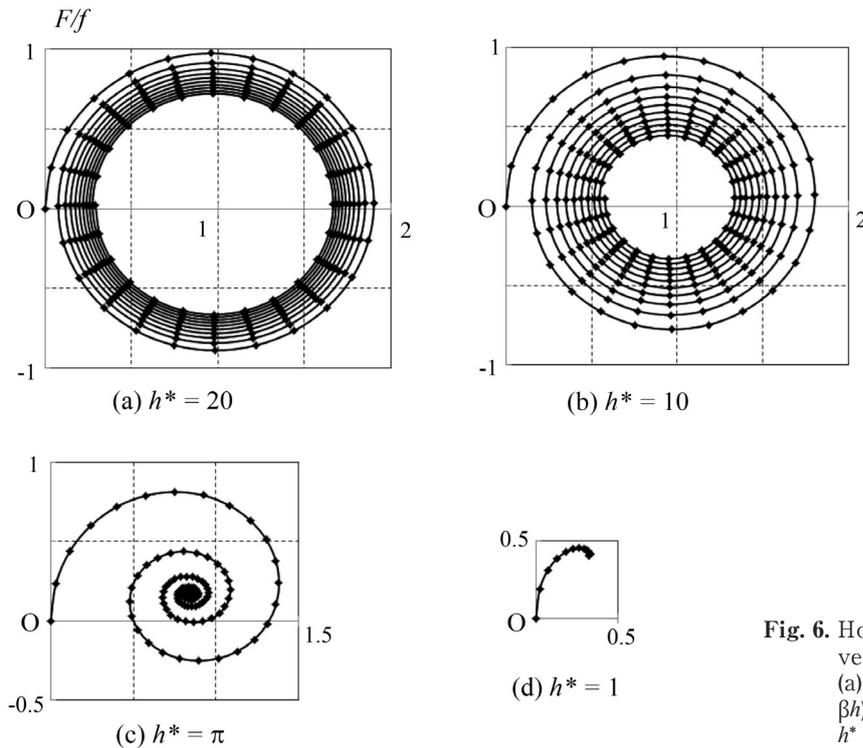


Fig. 6. Hodographs of the depth-averaged velocity of the transient slope current. (a) the normalized water depth, h^* ($= \beta h$), is 20, (b) h^* is 10, (c) βh is π and (d) h^* is unity.

おわりに

海洋現象の解明に数値モデルが主流となった近年、本研究は最先端に従事する研究者からは“なにを今更”と言われそうな報告であったかもしれないが、地道に原理に基づいたプロセスを複雑な海洋現象の素過程として理解しておくことも、高度なモデルや観測のデータを解釈する上で意義のある研究と考えている。モデルの大型化や観測・実験機材の高性能化によって説得力のある数値が容易に得られるようになった昨今であるが、一般の研究者にはそれらが内包するブラックボックスのホワイト化には手が着けにくい。そのことが、大型研究において捏造・改竄・剽窃を招いていることは周知の通りで、根幹となる支流を疎かにした主流では、持ち上げられたマスコミに梯子を外されることも宜なるかなというところであろうか。本報がささやかでも有意義な支流の一つになればと願っている。

Yasuda⁶⁾の吹送流の解析においては、測定誤差とも取られかねないようなバラツキがある潮流のデータの解釈でも、慣性周期平均を取り入れることによって、周防灘の鉛直粘性係数の算定をすることができた。本報の場合は海面傾斜によって引き起こされる海面下の流れの発達過程を解析的に調べたもので、力学計算による地衡流や気圧配置に

伴う風の関係の理解にも役立つのではないかと考えている。つまり、海水の力学計算や人工衛星の海面高度計による海面の凹凸が、地衡流としての海流を表しているかどうかということについては、特に海面傾斜が変動するときには、慣性周期程度の時間で平均することによって、地衡流として意味をもつといえる。さらに変動的な気圧配置と風においては、等圧線に沿って流れるとされる地衡流の問題だけでなく、時空間変動の影響を留意する必要があると考える。本報においては、水平方向の変動は考慮していないためにEuler的な解析で済ませているが、実際の海面昇降や気圧分布は水平的にも変化が大きく、それに対応する地衡流や地衡風は、慣性周期平均をとった場合でも流体本来のLagrange的な扱いが必要となる。これについては解決すべき課題が残されており、詳細な議論は別の場で深めたい。

津波や潮汐波に伴う流れにおいては、圧力勾配力に引き起こされる流れを解くというプロセスで問題はないかも知れないが、海面凹凸や気圧分布に伴う流れや風を考えるとときには上述のような問題もあり、変動する流れや風に引き起こされる海面凹凸や気圧分布を解くという手順がプロセスとしては理に適っているかもしれない。鶏と卵の関係のようになってしまいが、定常状態ではなく、自然にあり得

る非定常な過渡の状態を考えると、変動の過程における複雑な要素があり得るのではないと思われる。いづれにしても、回転系において変動する場合には、慣性系との齟齬のために慣性円運動が生じて維持されやすいことは間違いないであろう。

諄いようであるが、自然の海洋環境においては、方程式の解として提示されている定常状態はほとんど存在し得ないものの、慣性周期で平均したものは速い段階で定常解に至ることが、前報の吹送流の場合と共に本報の傾斜流でも明瞭に示された。海洋調査などにおけるデータのバラツキを、機器や観測手法による誤差と捉えることもあるが、慣性周期変動の中で局部的に測定したものとすれば、誤差は機材や手法の問題ではなく、知識不足によるソフト面の誤差となる。時流から外れた研究内容であったかも知れないが、本報告が主流の研究の中で少しでも役立つことがあればと願う次第である。

謝 辞

水産大学校研究報告が教育研究機関の研究報告集であることから、学術的な新規性のみに囚われることなく教育的立場も念頭に、これまでほとんど示されることのなかった導出のプロセスも丁寧に記しました。コンピューターが高性能化したことで、ブラックボックス化したソフトによって即座に結果がアウトプットされるこのご時世で、本稿のような基本的な内容を吟味する報告は、海洋物理学研究者の中でさえ無視されがちで海洋環境研究者の関心も薄いと思われるかもしれませんが、ブラックボックスが高度で巧妙になるほど、矛盾のない原理的なプロセスである個々の素過程の把握は無視できないことと思います。報告1)と6)でも記しましたが、本報は、著者が東京水産大学〔現在の東京海洋大学品川校〕修士課程の学生であった頃、指導教官でいらした故齋藤泰一先生との放課後の雑談の中で教えていただいたことを、先生の当時のお歳を越えた今になって改めて整理し、加筆しながらまとめたものです。本来ならば齋藤先生と共著にするべきところですが、もしかしたら誤りがあるかも知れないし、先生であればもっとスマートに著されるのではないかと危惧し、ここは私一人の責任ということで先生との関わりもここにしたためながら単著論文とさせていただきました。この歳になっても齋藤先生に教えていただいた“迷ったらまずは基本に戻ることです。”ということ肝に銘じ、業績を催促する環境に追われながらも、観測で得

られた海洋現象などの基本的なプロセスに留意しながら、定年退職まで研究者を続けていくことができました。基本に戻ることで興味や驚きを持ち続けることができ、今でも海洋現象や海洋環境への関心が失せることもなく、先生への感謝の念は堪えることはありません。また、この度の投稿に際しては、水産流通経営学科長の高本孝子教授に相談にのっていただき、退職したにも関わらず投稿させていただくこととなりました。投稿に際しての高本先生の激励を心より感謝申し上げます。

参考文献

- 1) 安田秀一：吹送流が形成するEkman螺旋とEkman輸送に関する考察. 水大校研究報告, **57**, 247-254 (2009)
- 2) V.W. Ekman : On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents. *Arkiv Mat. Astr. Fysik*, **2-11**, 1-53 (1905)
- 3) 齋藤泰一：東水大卒研セミナーの講義. (1971)
- 4) 磯辺篤彦, 神蘭真人, 俵 悟：周防灘南西部における貧酸素水塊. 沿岸海洋研究ノート, **31**, 109-119 (1993)
- 5) 万田敦昌, 兼原壽生, 青島 隆, 筒井博信, 木下 宰, 中田英昭, 柳 哲雄：有明海中央部における物質輸送過程の季節変動. 海の研究, **15**, 465-477 (2006)
- 6) H. Yasuda : Transient wind drift currents in a tidal inlet -theoretical analysis of Ekman drift current and field experiments in Suonada, the Seto Inland Sea-. *J. Oceanogr.*, **65**, 455-476 (2009)
- 7) A. Defant : *Physical Oceanography*, Vol. 1. Pergamon Press, Oxford, 729 pp. (1961)
- 8) G. Neumann and W.J. Pierson Jr. : *Principle of Physical Oceanography*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 545 pp. (1966)
- 9) D. Prandle : The vertical structure of tidal currents. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **22**, 29-49 (1982)
- 10) R. I. Soulsby : The bottom boundary layer of shelf Seas, ed. by B. Johns, Elsevier Oceanography Series, **35**, 189-266 (1983)
- 11) H. Yasuda : Vertical structure of tidal current ellipse in a rotating basin. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **43-5**, 309-318 (1987)