

論文

次元について
—空間次元数のずれと超弦—

吉村高男*1

キーワード：次元、次元数、時空次元、非整数次元、超弦理論、超弦

1 はじめに

物理学の世界における次元と言えば、時空間の次元と物理量の次元を挙げることができる。前者については、Newton 力学の時空間は絶対的なものと考えられていた。即ち、空間は物理現象が起きる入れ物であり、時間は宇宙のどこにおいても一様に刻まれていくものとされていた。この考え方を変更したのが Einstein である。特殊相対性理論では時間や空間は絶対的なものではなく、観測者が同じ事象をどのような状態で見るとかという、観測者の相対運動によって時間や空間が伸び縮みすることが示され、一般相対性理論では加速度運動系における時空間の伸び縮み、即ち歪みが重力による効果と同一であることが示された。最近では、4 つの力（電磁気力、弱い力、強い力、重力）を統一する理論として、改めて超弦理論が注目されているが、10次元、11次元と言った高次元の時空間で矛盾のない理論の構築が続いている。

一方、物理量の単位系を示す基本的な次元については、よく知られているように、長さ[L]、時間[T]、質量[M]がある。力学だけでなく、電磁気現象など他の現象を考える際には電荷[C]など別の種類の物理量に対応した次元を考える必要がある。物理学における関係式の両辺は値だけでなく、次元も等しくなくてはならない。よって、ある物理量が他のどのような物理量で構成されるかが分かっている場合には、無次元の比例定数までは導くことはできないが、次元解析という手法でその関係式を導くことができる。さらに、素粒子物理学でよく使う単位系として「自然単位系」がある。

素粒子物理学においては、相対論的效果と量子論的效果が顕著になるため、基本定数である光速 c と Planck 定数 h が随所に出てくる。これらの次元を 1（無次元）とすることで、 $[L]=[T]=[M^{-1}]$ となり、様々な物理量が一つの次元で示すことが可能になる。

本稿では、次元の定義、超弦理論の進展を振り返ると同時に、時空次元数の連続化^{1)・5)}を図る中で生まれてくる新たな物理学的意味合いについて述べる。

2 次元の定義

初等幾何学のイメージでは、1次元は直線、2次元は平面、3次元は立体ということになる。4次元以上の高次元空間になると、数学的には変数の数が増えるだけのことであるが、それらを具体的にイメージすることは難しくなる。3次元空間までは、直交する直線座標系、所謂 Descartes 座標系で私達は明確に理解できる。この座標系において、よく知られているように、次に表した(1)式は半径 r の円の方程式を、(2)式は半径 r の球の方程式を示す。

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2)$$

このことを拡張して、半径 r の n 次元の球の方方程式を書くことができる。

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \quad (3)$$

このことは、Pythagoras の定理の拡張でもあり、合理的に理解が可能である。 n 次元球の体積 V_n は、 n 重積分を実行することで、次のようになる。

*1 至誠館大学 ライフデザイン学部

$$V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} r^n \quad (4)$$

ただし、 $\Gamma(N)$ はガンマ関数であり、 $\Gamma(N+1)=N\Gamma(N)$ 、 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 、 $\Gamma(1)=1$ である。 n 次元球の表面積 S_n は体積の微分で求めることができる。

$$S_n = \frac{dV_n}{dr} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} \quad (5)$$

このように、ガンマ関数を導入することによって、次元数が整数次元だけでなく、非整数次元まで拡張した一般化図形に関する議論の足掛かりが見えてくる。

また、空間次元 $n=3$ の場合における球の体積 V_3 と表面積 S_3 は、(4)、(5)式を用いて、よく知られている次の式を導けることが確認できる。

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (6)$$

$$S_3 = 4\pi r^2 \quad (7)$$

ところで、物理学における基本的な方程式は、一般的に次に示す2階の偏微分方程式の形をしている。時空次元数を d とし、空間次元数 n 、時間次元数 m とする ($n+m=d$)。計量テンソル A_{ij} の主対角線の符号により、楕円型、双曲型等の微分方程式になる。

$$(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c)u = 0 \quad (8)$$

よく知られているように、低エネルギーレベルにおける、マクロ的に広がった、整数次元としての空間次元数 n と時間次元数 m の組み合わせによる物理学の整合性については、次のように分類できる。

- (1) 時間次元が $m=1$ 以外の次元数では、因果性が明確にできず、物理学的な事象を十分に予測することができない。
- (2) 空間次元が $n>3$ では、事象が不安定でポテンシャル運動においても、一般的に安定軌道が存在しない。

い。原子も不安定で存在できない。

- (3) 空間次元が $n<3$ では、事象が余りに単純になり、高機能を持った生命体は存在できず、2次元生命体は下図に示しているように、消化管で分断される。重力についても、安定した束縛状態の軌道を形成することができない²⁾。

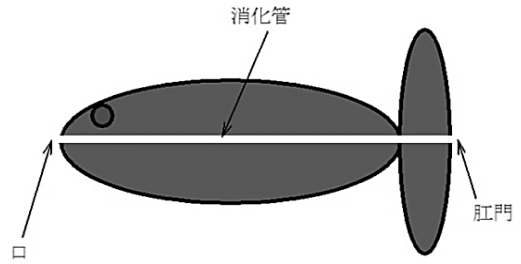


図1 2次元生命体 (消化管による分断!)

以上の議論をまとめると、図2のようになる。横軸が空間次元数で、縦軸が時間次元数である。私達が住んでいる時空4(=1+3)次元の世界が、絶妙に選ばれたリーズナブルな存在であることが分かる⁹⁾。

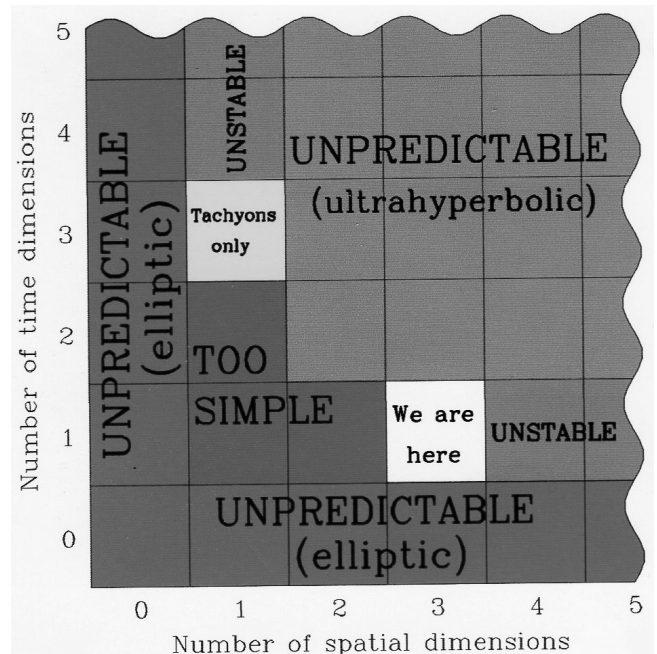


図2 空間次元数と時間次元数の関係

(引用文献: M. Tegmark; On the Dimensionality of Spacetime, Classical Quantum Gravity, 14, 69, 1997)

数学的な次元の定義には、様々なものが考えられるが、対象としている図形の次元と、それが埋め込まれている空間次元とは区別して考える必要がある。対象とする複雑な図形が背後にある空間をどれだけ埋め尽くすかという観点から、非整数次元を考えることができるが、その代表的なものとして、自己相似図形であるフラクタルがある。フラクタルは葉脈や血管など、動植物を形成している構造パターンや、海岸線や等高線のパターンなど、近似フラクタルとして、多くの自然現象の中に見いだすことができる。ここでは、一般的な次元の定義として、リーズナブルなものとしてイメージしやすいフラクタル次元について述べる。

図3に示しているように、図形のサイズが1のものを各空間方向に対して、 $1/l$ に縮小し、元の図形を埋めるために必要な、その縮小写像した図形の個数 N は次の式で示される。

$$N = l^D \tag{9}$$

即ち、

$$D = \frac{\log N}{\log l} \tag{10}$$

である。この図形の次元 D は、背景 Euclid 空間の次元である位相次元 $1, 2, 3 \dots$ の整数次元に一致する。

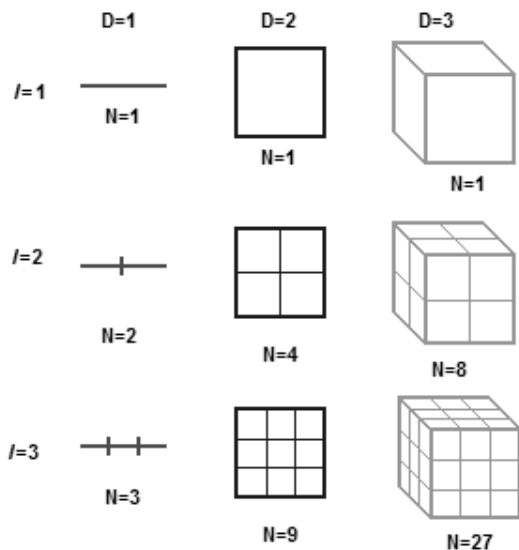


図3 縮小写像した図形による次元の定義

(<http://ja.wikipedia.org/fractal> から引用)

次に Cantor 集合 (図4) について考える。線分を3等分し、得られた3つの線分の真ん中にある線分を欠落させていく操作を繰り返すことで得られる集合である。位相次元は0であるが、フラクタル次元 D は、次に示すように0と1の間の値を取り、次元のイメージとしてリーズナブルなものとなる。

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots \tag{11}$$

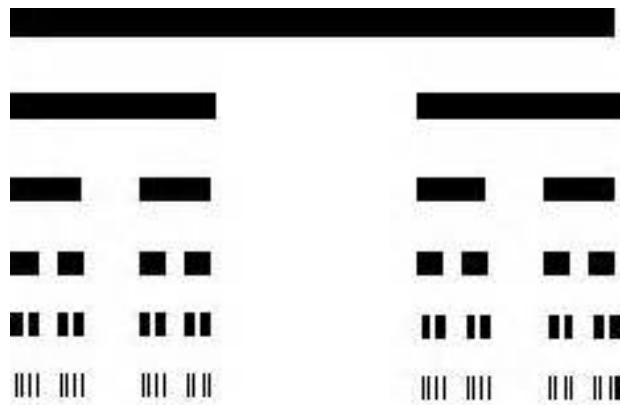


図4 Cantor 集合

(<http://ja.wikipedia.org/cantor> から引用)

図5に示した Koch 曲線について考える。この曲線は、相似比が $1/3$ の4つの部分からなっている。1回の操作で長さが $4/3$ 倍になるため、無限の操作を繰り返すと Koch 曲線の長さは無限大になる。Koch 曲線の位相次元は1であるが、フラクタル次元 D は、次に示すように1と2の間の値になる。

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261 \dots \tag{12}$$

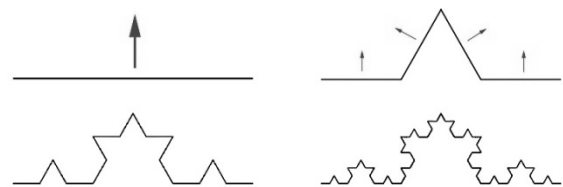


図5 Koch 曲線

(<http://ja.wikipedia.org/wiki/koch> から引用)

図6に示した Sierpinski のギヤスケットは、1/2 に縮小した三角形3つで周囲を埋めていく操作を繰り返す。真ん中の三角形を欠落させていくパターンになる。よって、次に示したように、フラクタル次元Dは1と2の間の値になり、Koch 曲線に比べて次元数が大きく、図形のパターンとしてより密になっていることがイメージできる。

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.584 \dots \quad (13)$$



図6 Sierpinski のギヤスケット

(<http://ja.wikipedia.org/sierpinski> から引用)

3 超弦理論の進展

素粒子物理学の基本的な使命は、物質の構成要素とその間に働く相互作用を明確にし、それらの統一的な理論を確立することにある。現在の素粒子物理学では、構成要素については、バリオン（重粒子：陽子、中性子等）やメソン（中間子： π 粒子、K 粒子等）を構成しているクォーク（3世代、6種類）とレプトン（軽粒子：電子、ニュートリノ等で、クォークと同様に3世代、6種類）が存在していることが確認されている。これらはスピンの1/2のフェルミオンと呼ばれる粒子である。相互作用については、重力相互作用、電磁気相互作用、強い相互作用、弱い相互作用の4種類があることが分かっている。それらの力を媒介する粒子がボゾンと呼ばれる、スピン1のゲージ粒子やスピン2の重力子である。その中で、重力相互作用を除く3つの力の統一モデルがゲージ理論と呼ばれる標準模型でまとめられ、その理論によって予言されていた未発見の Higgs 粒子が CERN の LHC で最近見つかり、標準模型の正しさが実証された^{7)~9)}。しかしながら、観測される物理量を正確に再現するにはこの標準理論では、多くのパラメーターの値を手で入れる必要があり、さ

らに、素粒子を点で捉える限り、計算の途中で発散が生じるなど、根本的な困難さが残る。

最終的な重力を含む相互作用の統一理論を考える上で、力を媒介するゲージ粒子と重力子及び物質の構成要素のクォーク、レプトン等を点ではなく、1次元状に広がったひも、即ち弦 (String) と捉え、素粒子が持つ様々な属性を統一的に導出しようとしたのが超弦理論 (Super String Theory) である。粒子を点と捉えないので、自ずと計算の途中でカット・オフが入るため、原理的には発散の困難さからは解放される。この章では、超弦理論の進展と現状について簡単なレビューと議論を行う。

ただし、超弦理論にも、より本質的な課題が残っている。そもそも超弦理論が正しいのなら、その弦は何からできているのかを解明する必要がある。さらに、超弦理論が成立する10次元、11次元といった高次元時空から、どのような宇宙のメカニズムにより、私達が日常的に感じている、安定で巨視的な4次元時空が現れてきたのかを導く必要がある。また、現在の素粒子物理学では、この宇宙がビッグ・バン (Big Bang) で始まった際、生成される粒子（正粒子）と反粒子の個数が同数でなければならない。しかしながら、この宇宙では粒子、即ち物質が生き残り、反物質は消え去っている。私達の体も含め、天体を形成しているものは物質である。標準模型や超弦理論では、反物質が消え、物質が生き残るメカニズムについて、満足のいく説明をすることができない。この議論は、レプトン数生成、バリオン数生成の問題として、現在様々な議論があるが未解決である。このような本質的な議論については次の章で行う。

さて、もともと素粒子のハドロン (バリオンとメソンの総称) の散乱現象に基づいて、ハドロンを弦として捉える理論が1970年代の初期に出現した。このエネルギーは1 GeV (10^9 eV) オーダーであったが、超弦理論で考えるエネルギーは宇宙開闢時の 10^{19} GeV という所謂プランクエネルギーのスケールで、このエネルギ

一は現在の最高エネルギーを誇っている素粒子加速器 LHC のエネルギースケールである 1TeV(10^{12} eV)を遙かに超えるエネルギー領域である。超弦理論の走りとなる、相対論的な弦の理論を本格的に考えた弦理論は、日本の南部、後藤に始まる¹⁰⁾¹¹⁾。この理論では、相対性原理を満たし、量子力学的に矛盾のない時空間の臨界次元は 26 次元であることが導かれる。一般に弦理論では、適当な時空次元を取ると、質量が 0 で、スピンの 1 の粒子とスピン 2 の粒子を生み出す。そして、スピン 1 の粒子はゲージ粒子の性質を持つこと、スピン 2 の粒子は重力子の性質を持つことが、Scherk、Neveu、Schwarz、米谷¹²⁾によって確認された。スピン 1 のゲージ粒子は「開いた弦」として、スピン 2 の重力子は「閉じた弦」で示される。この発見がもとで、弦理論が重力を含む統一理論となり得ることが示されたわけである。

ところで、南部、後藤の弦理論は基底状態の質量に虚数となるタキオンが出現し、粒子スペクトルの中にフェルミオンが現れず、ボゾンだけの理論である。これらの欠点を持たない弦理論については、ハドロンの模型として 1971 年に、Neveu と Schwarz¹³⁾ がボゾン模型を、Ramond¹⁴⁾ がフェルミオン模型を提案した。これらの模型をもとにして、フェルミオンとボゾンが対称に現れる超弦理論が構築されていった。フェルミオンとボゾンが双対で存在する超対称性を持ち内部矛盾のない超弦理論は 5 種類存在することが導かれた。

一般に、理論の量子化を行う際に、様々な不変性、保存則を破る項、即ち「アノマリー」と呼ばれる量子力学的異常項が現れる。この異常項の存在は理論全体を破壊してしまうことになる。よって、異常項が出現せず、出現してもそれらが相殺するような操作や条件を設定する必要がある。素粒子の標準模型では、クォークとレプトンの世代数が 3 世代であることで、アノマリーが相殺してうまくいく。同じように、I 型の超弦理論におけるアノマリーは、ゲージ対称性としての $32(=2^5)$ 次元の回転対称性 $SO(32)$ を持つときに限り、ア

ノマリーが相殺することが、Green と Schwarz によって発見された¹⁵⁾。1984 年のことである。

超弦理論の臨界次元の導出については次の通りである。弦の基底状態、即ちエネルギーの最低状態は、量子論特有のゼロ点振動の寄与と、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12} \quad (14)$$

の関係式を活用して、

$$m = m_0 \left(1 - \frac{D-2}{8}\right) \quad (15)$$

となる。

基底状態の中には、重力子や光子が含まれ、それらの質量は 0 であるため、臨界次元としての時空次元数 D は、

$$D = 10 \quad (16)$$

として導かれる。

この 10 次元という次元数は超対称性をはじめ、様々な数学的な計算の側面からも支持されており、超弦理論が成立する時空次元数が 10 次元（空間次元数は 9 次元）であることの実証に繋がっている。5 種類の超弦理論については、次のようにまとめることができる。

- (1) I 型の超弦理論：「閉じた弦」と「開いた弦」の両方を含み、ゲージ粒子数が 496 個ある。
- (2) IIA 型の超弦理論：「閉じた弦」だけを含み、10 次元時空（9 次元空間）でパリティ(鏡映変換)不変性(カイラル不変性)を破れない。
- (3) IIB 型の超弦理論：「閉じた弦」だけを含み、9 次元空間でパリティ不変性を破る。3 次元空間にコンパクト化すると、パリティ不変性が破れない。
- (4) ヘテロ型 $SO(32)$ ：右巻きと左巻きの「閉じた弦」が、それぞれ独立した空間で振動する。32 次元のゲージ対称性を持つ。ゲージ粒子数が 496 個ある。
- (5) ヘテロ型 $E_8 \times E_8$ ：右巻きと左巻きの「閉じた弦」が、それぞれ独立した空間で振動する。例外群 $E_8 \times E_8$ のゲージ対称性を持つ。ゲージ粒子数が 496 個ある。

このような超弦理論の発見は「第一次超弦理論革命」と呼ばれ、1980年代に急速な進展があった¹⁶⁾。10次元時空を4次元時空に落とす確かな手法は見つかっていないが、余分な次元である6次元空間をうまくコンパクト化できる数学的空間が存在する。Calabi-Yau空間である。しかしながら、このコンパクト化してできる安定した真空状態は 10^{500} 通りものオーダー数になる。Calabi-Yau空間の特別な幾何学的性質で、3次元空間内における物質の基本粒子であるクォークやレプトンの世代数が決まることも分かっている。私達が感じている時空4次元内で起こる様々な物理現象が、実は余剰次元で形成される6次元のCalabi-Yau空間が持つ様々な特性によって決められるという新たな発想を持つことができるようになった。

しかしながら、5種類の超弦理論が統一理論として一本化できないことや、すでに述べているように、超弦理論が成立する10次元時空から、私達が日常的に感じている4次元時空を数学的に素直に導くことができないなどの理由で、1980年代から1990年代にかけて、しばらく超弦理論は行き詰まりを見せていた。

1995年になり、新しい「第二次超弦理論改革」のうねりの波が、超弦理論を主導しているWittenによってもたらされた。「双対性」という概念を超弦理論に取り入れることで、5種類の超弦理論がすべて繋がるという発想である¹⁷⁾。超弦理論の背後にさらなる統一理論「M理論」があり、その5つの化身として従来の超弦理論が見えているという提案である。

実は、その10年前の1985年に日本の吉川と山崎は、IIA型理論とIIB型理論の空間次元について8次元の平坦な空間と円の組み合わせになっている状態を考え、IIA型理論を半径Rの円にコンパクト化した状況は、IIB型理論を半径1/Rの円にコンパクト化した状況と全く同じであることを発見していた¹⁸⁾。所謂「T双対性」である。コンパクト化する尺度を変えることにより、異なって見える2つの理論に対して、一方から他方への連続的変化が起こる。この「T双対性」はヘテ

ロ型の超弦理論であるヘテロ型SO(32)とヘテロ型 $E_8 \times E_8$ の間にも成立することが分かっている。

さらに、IIB型理論の自己双対性は、相互作用の強さを変える「S双対性」で等価であることが示される。IIB型理論は2階の反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ 、 $C_{\mu\nu}$ を持っているが、それらの入れ替えと、相互作用の強さを示す結合定数 G_s とその逆数 $1/G_s$ の入れ替えで理論が等価となるわけである。これは一般に解析が難しい強結合な理論が、摂動論で簡単に計算できる弱結合の理論で置き換えられることを示している。この「S双対性」は図7を見ても分かるように、I型とヘテロ型SO(32)の理論も繋げている¹⁹⁾。

さて、IIA型理論では、質量0のボソンは重力場、スカラー場、ベクトル場、2階反対称テンソル場、3階反対称テンソル場からなることが知られている。スカラー場を11番目の添字で示すと、時空次元が11次元の重力場と3階反対称テンソル場の2つの場で構成されることが分かる。この事実は10次元と考えられていた超弦理論の背後に11次元の理論が隠れていることを示唆する。この11次元の理論の本格的な定式化は未だなされていないが、Wittenはそれを「M理論」と呼んでいる²⁰⁾。図7によく描かれる「M理論」と超弦理論の関係図を示した。超対称性を取り入れた重力理論である11次元の超重力理論も図に入っているが、これは「M理論」の低エネルギー極限で得られるものと考えられている。

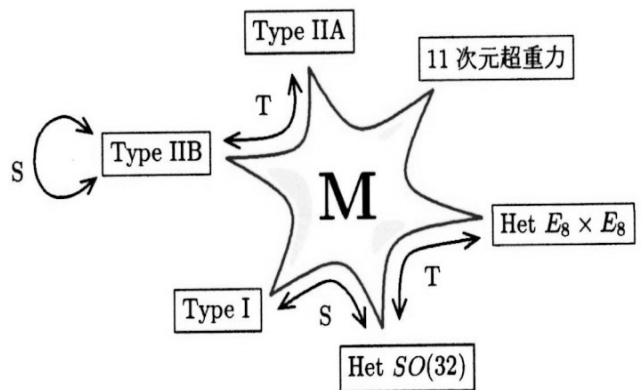


図7 双対性で結ばれる超弦理論

II B 型理論の弦は、すでに述べた 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ に関する電荷を持つことが知られている。これは普通の点電荷がベクトル場 A_μ に関する電荷を持つことを弦の場合に拡張したものである。「S 双対性」によると、もう一つの 2 階反対称テンソル場 $C_{\mu\nu}$ も電荷を持つ弦が存在する。この弦のことを D1-ブレーン (Brane) と呼ぶ。さらに、この D1-ブレーンに対して「T 双対性」を使うと Dp -ブレーンという $(1+p)$ 次元 (時間次元が 1 で、空間次元が p) の物体が存在することが分かる。この p の値は II A 型理論では偶数、II B 型理論では奇数となる。

Dp -ブレーンの概念を思いついたのは Polchinski である²¹⁾。開弦の端点が張り付くブレーンを Dp -ブレーンとし、開弦がブレーン上に固定端を持つ境界条件 (Dirichlet Boundary Condition) から、ブレーン名に「D」をつけた由来がある。ブレーンの種類については、広がりのない点は 0-ブレーン、1 次元に広がった弦は 1-ブレーン、2 次元に広がった膜は 2-ブレーン、3 次元に広がった立体は 3-ブレーン、 p 次元に広がったものは p -ブレーンと呼ぶ。すでに述べたように、開弦が張り付いているのが D-ブレーンであり、この D-ブレーン概念は、ブラックホールの熱力学及びエントロピーを事象の地平面上で議論する際に本質的な役割をする。

D-ブレーンは重さのある物体なので、D-ブレーンが存在すると周りの時空は歪む。よって、D-ブレーンをうまく配置すればブラックホールをつくることができる。即ち、ブラックホールを超弦理論の枠内で議論することが可能になり、ブラックホールのエントロピーの計算ができるようになる。従来は、ブラックホールの熱力学として、Bekenstein と Hawking が導いたエントロピー S_B は次のようになる²²⁾。

$$S_B = \frac{kA}{4L_p^2} (=2\pi k\sqrt{NQ_1Q_5}) \quad (17)$$

ここで、 k は Boltzmann 定数、 A は事象の地平面の面積、 L_p はプランク長である。また、 N 、 Q_1 、 Q_5 は電荷である。これに対して、超弦理論によるエントロピ

一の計算は、統計力学的に状態数を数えることで導く。ブラックホールでは、開弦が事象の地平面の内部でなく表面に張り付いている。この開弦がブラックホール表面で運動をして、熱力学的な温度概念を創出している。このようにして、超弦理論によるエントロピーについても (15) 式と同様の式が導かれた²³⁾。

即ち、ブラックホールの内部のことは、その表面を見ることですべてが分かるということになる。この原理は Maldacena によって解明された²⁴⁾。そこでは、重力を含む 10 次元の II B 型超弦理論が、重力を含まない 4 次元の場の量子論ですべて説明できるという画期的な内容が議論された。「重力のホログラフィー原理」とも呼ばれており、次元の異なる理論を使って計算しても結果が同じになるということを述べており、今までの物理学の常識では考えられないことである。ここまできると、そもそも空間や次元とはいったい何であるのかという根源的な問いかけが必要になってくる²⁵⁾。

時間については、超弦理論では、空間と同じように時間が現れたり消えたりする例はなく、宇宙開闢以来、過去から未来に流れる 1 次元の時間軸を与えて様々な議論を行っている。熱力学的な時間概念については、エントロピーは増大する方向が自然に起こる方向なので、超高エネルギー状態で始まった宇宙開闢時に、宇宙のエントロピーは最も低い状態であったとしなければ、宇宙的な時間の矢の方向を説明することができない。このことは宇宙が膨張していることとも密接な関係がある。時間とは何かという問いは現在の時点では答えることができない難問である。

さて、最近、10 次元の超弦理論 II B 型行列模型を使って、私達が慣れ親しんでいる 4 次元時空が宇宙創成の中で必然的に導ける兆しを得られたという話題²⁶⁾があるので紹介したい。時間の 1 次元は除いて、そもそも 9 次元空間から 6 次元空間のコンパクト化が自発的に起こり、3 次元空間の D3-ブレーンが形成されたとすると、私達の宇宙が実現できる。M 理論と II B 型超弦理論の非摂動的な性質を表現できる代表的な行列

模型 (Matrix Model) が、1996年に日本の石橋、川合、北澤、土屋によって考えられた「IKKT 行列模型」²⁷⁾ である。「IKKT 行列模型」は、超弦理論であるため、時空や物質等すべての自由度を含んでいる。10個の実数で表される10次元時空からなる Lorentz Vector と、16個の Grassmann 数を成分として持つ Majorana-Weyl Spinor が存在する「超空間」の中でその行列は形成される。ここで、Grassmann 数とは同じ場所に2つ以上占有できないフェルミオンを特徴づける数である。フェルミオンが占める超空間の次元はフェルミオン次元とも呼ばれている。ゲージ粒子などのボゾンについては、同じ場所にいくらかでも占有でき、その占有密度が力の強さに関係すると考えることができる。

私達が慣れ親しんでいる4次元時空の座標は4個の数字の組で表されるが、「IKKT 行列模型」における「超空間」の座標は26個の数字の組で表される。よって、弦を表現するには26個の数字の組が無限個つながったものとなる。しかし、弦の長さは、この宇宙で考えられる最小スケールである Planck 長 (約 10^{-35} m) 程度と考えられている。よって、「IKKT 行列模型」で計算される時間スケールは、この Planck 長を光速で割った Planck 時間 (約 10^{-44} 秒) 程度が基本的に考えている領域ということになる。

また、弦の相互作用については、弦を構成する点と点の関係性の時間変化と捉えることができる。相互作用に伴って、弦の長さや弦の本数が変化し、位置移動や弦の振動パターンが変化する。これらは、弦を構成する無数の点座標の時間変化と捉えることができる。今、弦を構成する点の数を N とすると、状態を表す N 行 N 列の行列を組むことができ、座標成分が10個あるため、結局、弦の1つの状態を表す成分の数が $10 \times N \times N$ 個あることになる。これに加え、フェルミオン次元に対応する16個の N 行 N 列の行列も存在する。2011年に西村、土屋、金は、 $N=16$ とした「IKKT 行列模型」で、時間を実数とする Lorentz 型 IIB 行列模型における初期宇宙の膨張に関する計算を行った。 N を

無限大とすることで宇宙の誕生から終焉までが議論の対象には原理的にできるはずであるが、現在のスーパーコンピュータでは計算容量に限界があるため、 $N=16$ で計算が実行された。宇宙開闢時における Planck 時間 (約 10^{-44} 秒) 及び Planck 長 (約 10^{-35} m) 領域での振る舞いしか見えないが、図8に示しているように、空間次元に対して、 $SO(9)$ から $SO(3)$ に自発的に対称性が破れている兆しが見えている。 $N=32$ においても同様の結果が得られている。横軸が宇宙開闢時における時間経過であり、縦軸が9個ある空間次元のそれぞれの座標軸の伸長具合を示している。今回の計算は、6次元の空間軸がコンパクトに留まり、3次元の空間軸が成長する兆しがあることを捉えたが、このことが指数関数的に膨張する宇宙のインフレーションや火の玉ビッグバンに直接繋がっていくかどうかは、今後の課題である (図8)。

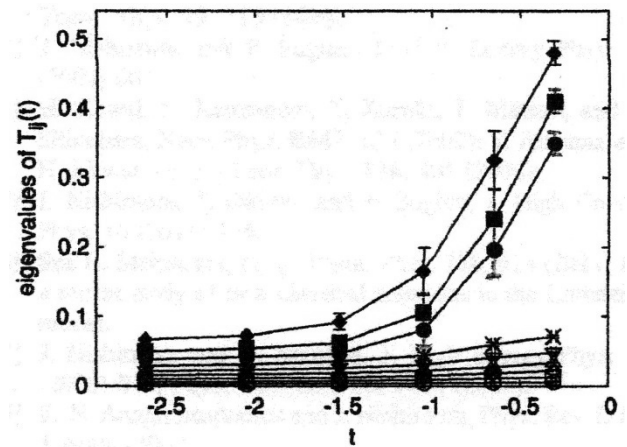


図8 宇宙開闢時における3次元空間成長の兆し
(引用文献: S.W.Kim, J.Nishimura, A.Tsuchiya ; Expanding (3+1)-Dimensional Universe from a Lorentzian Matrix Model for Superstring Theory in (9+1)Dimensions, PRL108,011601,2011)

4 時空次元数のずれと超弦

すでに述べているように、現在の素粒子物理学では、この宇宙で生成される粒子 (正粒子) と反粒子の個数が同数でなければならない。しかし、私達の体をはじ

め、天体を形成しているものは物質（粒子）である。標準模型や超弦理論では、反物質（反粒子）が消え、物質が生き残るメカニズムについて満足のいく解答はない。このことは、レプトン数生成、バリオン数生成の問題として捉えられており、様々な議論があるが、現在未解決である。

バリオン数生成については、宇宙論的観測²⁸⁾により、バリオン数密度 n_B と光子数密度 n_γ との比 η は次のように確認されている。

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = (6.14 \pm 0.25) \times 10^{-10} \quad (18)$$

即ち、この宇宙では正・反物質の内、 10^{-10} オーダーで物質が生き残り、現在見られる宇宙構造が形成されたと考えるわけである。よく知られているように、ロシアの Sakharov はこのような宇宙が形成される3条件を次のように示した²⁹⁾。

(1) バリオン数非保存

(2) C 及び CP 対称性の破れ

: この破れがないと、バリオン数の変化 $\Delta B \neq 0$ の過程と逆過程が同じ頻度で起こる。

(3) 平衡からのずれ

: 宇宙のバリオン数の時間発展を考えた場合、平衡からのずれがないと、バリオン数の密度 ρ_B が結局 0 になる。

これらは現在の宇宙現象を説明するために必要な条件を手で入れているわけである。自発的に対称性を破るメカニズムも考えられているが、本稿では、もう少しダイナミカルな視点から議論をする⁵⁾。

即ち、時空次元について、連続次元まで拡張してダイナミカルに捉えるということである。現在の宇宙は限りなく時空 4 (=1+3) 次元に近づいているが、空間次元を $3+\varepsilon$ 次元として、時間次元を $1-\varepsilon^*$ と捉える。宇宙開闢時には $\varepsilon \rightarrow \infty$ であり、その時 $\varepsilon^* \rightarrow 1$ となり、時間次元は存在しない。最初の次元変化は激しく、

宇宙膨張を通して速やかに $\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon^* \rightarrow 0$ となる。時空 4 次元の誕生である。そのような ε と ε^* の関係を表す Toy Model⁵⁾ を次に示す。

$$e^* = \frac{1+a}{a+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (19)$$

ここで、 a は任意の定数である。 $a = 1$ とすると、

$$e^* = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (20)$$

となる。 ε^* と ε の関係を示すグラフは次の通りである。

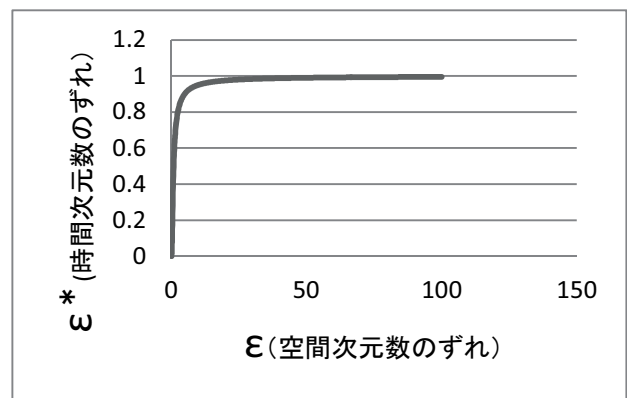


図9 時空次元のダイナミカルな変化モデル
(空間次元: $3+\varepsilon$ 次元、時間次元: $1-\varepsilon^*$ 次元)

次に、私達は 4 次元時空としてこの世界を捉えているので、空間次元の $3+\varepsilon$ 次元と、時間次元の $1-\varepsilon^*$ 次元の和となる時空次元数 D を考える。

$$\begin{aligned} D &= (3+\varepsilon) + (1-\varepsilon^*) \\ &= 4 + (\varepsilon - \varepsilon^*) \end{aligned} \quad (21)$$

空間次元数 3 からのずれ ε と時空次元数 D との関係を示すグラフで示す (図 10)。

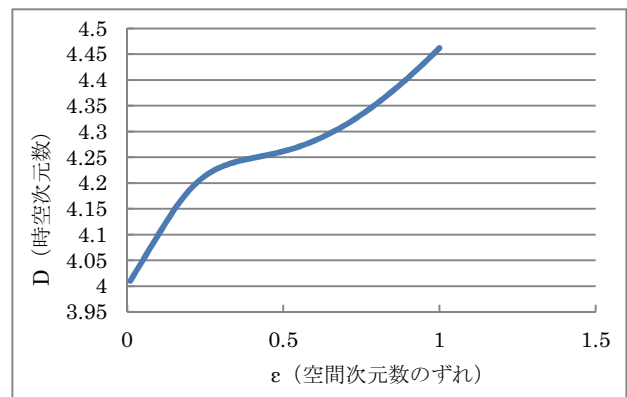


図10 ε と D の関係を示すグラフ

時空間の次元数が連続的に変化する本質的な場面は、宇宙開闢時の超高エネルギー状態や、ブラックホールと言った物質の超高密度状態における極限状態においてである。そこでは、まさに、質量や重力という最も基本的な物理量が創成される場面である。Euclid 幾何学のもとで物理学を展開したのが Newton 力学であり、非 Euclid 幾何学 (Riemann 幾何学) を物理学に適用したのが Einstein による一般相対性理論である。そこでは時空間の歪みを重力として捉えたわけである。超弦理論では、Maldacena の理論により、重力をホログラフィー化して、一見幻のように捉えることが可能になった。もともと、一般相対性理論は、等価原理により一様な重力場においては適当な加速度運動をする座標系を基準にすることで、すべての物理現象に対する重力の作用を消すことができるということから出発していることも重要な点である。

ところで、重力、質量といった概念は物理学の根幹に係わる概念である。素朴に宇宙の創成を考える際に、はじめから時空の整数次元ありきでは宇宙の器が堅すぎ、宇宙が始まらない。宇宙の始まりを柔らかく捉えるために、時空次元数をダイナミカルな変数としたい。そこで、時空次元数を連続化することにより、4 次元時空からのずれ、特に、空間次元数 3 からのずれ ε が重力、質量を担っていると考え。素粒子の質量スペクトルに対応した次元スペクトルも存在しているはずである。即ち、究極的には、超弦(Super String)が空間次元数 3 からのずれ ε で成り立っていると考えるわけである。次元のずれ ε の絶妙な絡み合いの規則性が、素粒子の質量スペクトルに反映しているという発想である。このことは、本章の最初に述べたレプトン数生成、バリオン数生成についても、当然のこととして簡単に理解することができる。即ち、宇宙開闢時に、多くの正・反粒子は発生したが、Sakharov の 3 条件のもとで、正粒子が生き残ったわけではなく、3 次元空間に次元降下 (時間は 1 次元に次元上昇) する際に、次元のずれ ε の安定な次元スペクトルに対応した素粒子

が形成され、それらが現在の宇宙を形成していると考え。このまま宇宙膨張が続くと、次元数が 4 次元の時空間に完璧なまでに限りなく近づいていくため、安定な素粒子もやがて崩壊する運命にあることになる。このあたりの物理学の構築については、J. von Neumann が考えた連続幾何学(Continuous Geometry³⁰⁾)の発想を活用することが必要になると考える。

このように考えてくると、整数次元数からのずれが、低エネルギー極限においては、一般相対性理論における時空間の歪みと等価として捉えることも一つの可能性として興味深い。この件については、後ほど演習として示す。

いずれにせよ、宇宙開闢時やブラックホールのような極限的な物質状態における本質的な理解のためには、どうしてもダイナミカルな次元数の変化を考えざるを得ない。次元数を連続化することによって、4 次元時空で成立する様々な対称性や保存則も、当然そのような極限状態では破れる。それらが破れているところから始まるが故に、138 億年前に私達のこの宇宙が創成されたとも言える。対称性が破れているところから対称性が生まれる。現在、正当な理論として盛んに議論されている自発的対称性の破れに対する逆転の発想である。

さて、一般相対性理論の検証例³¹⁾⁻³³⁾として知られている「水星の近日点移動」、「太陽による光線湾曲」、「重力場によるスペクトル線の赤方偏移」について、ここでの議論を適用した場合に考えられることを演習として次に示す。

まず、水星の近日点移動について考える。水星の近日点移動は 100 年で 574 秒であるが、他の惑星の効果等を考慮に入れ、Newton 力学を用いて解くと、理論的に 43 秒少ない 531 秒となる。この 43 秒のずれを、理論的に解消したのが一般相対性理論である。太陽を中心として、その周りを回る水星の運動を考える。空間次元数が $3+\varepsilon$ で 3 次元から微妙にずれており、重力ポテンシャルが $1/r^{1+\varepsilon}$ に比例した運動をしていると考

える。軌道の動径方向の距離を r とすると、軌道の式は次の形で書ける。

$$r = \frac{L}{1+e \cos \gamma \theta} \quad (22)$$

重力ポテンシャルの中に入っている次元のずれ ε は上式の位相部分にある γ と関係してくる。

$$\gamma \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (23)$$

一方、一般相対性理論を用いて軌道の方程式を求めると、 γ の値は次のようになる。

$$\gamma \approx 1 - \frac{3GM}{c^2 L} \quad (24)$$

ここで、 G は万有引力定数、 M は太陽の質量、 c は光速である。(23)と(24)は等しいので、次元のずれ ε は次のようになる。この値が近日点移動に寄与する。

$$\varepsilon \approx \frac{6GM}{c^2 L} = \frac{3R_G}{r_0(1-e^2)} \quad (25)$$

上式では、水星軌道の長軸の長さを r_0 とし、楕円軌道の離心率を e としている。 R_G は太陽がブラックホールになる Schwarzschild 半径 (重力半径) で、次の式で示される。

$$R_G = \frac{2GM}{c^2} \approx 2.95 \text{ km} \quad (26)$$

さらに、水星軌道の離心率 $e \approx 0.206$ で、水星軌道の長軸半径 $r_0 = 6.97 \times 10^7 \text{ km}$ であるから、水星軌道における空間次元数のずれ ε は、

$$\varepsilon \approx 1.33 \times 10^{-7} \quad (27)$$

となる。

次に、太陽表面での空間次元数のずれ ε_S を考える。(25)式の分母にある水星軌道の長軸半径 r_0 を、太陽の半径 r_S で置き換え、 e は 0 とする。

$$\varepsilon_S \approx \frac{3R_G}{r_S} \approx 1.27 \times 10^{-5} \quad (28)$$

太陽表面では、 10^{-5} オーダーの空間次元数のずれがあることになる。このことを踏まえて、太陽による光線の湾曲について考える。よく知られているように、

光線湾曲の角度変化 2θ は次の式で示される。

$$2\theta \approx \frac{4GM}{c^2 r_S} = \frac{2R_G}{r_S} \quad (29)$$

(28)式を用いて、(29)は次のようになる。

$$2\theta \approx \frac{2}{3} \varepsilon_S \approx 8.47 \times 10^{-6} \quad (30)$$

続いて、重力場によるスペクトル線の赤方偏移について述べる。太陽の表面からのスペクトル線の偏移について考える。これについても、よく知られている光の振動数変化の割合の式を用いて、それを太陽表面での空間次元数のずれ ε_S で示すことができる。

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx \frac{R_G}{2r_S} = \frac{1}{6} \varepsilon_S \approx 2.12 \times 10^{-6} \quad (31)$$

このように、太陽表面近くで空間次元が3次元から大きい方にずれているために、光線湾曲や赤方偏移が起こっていると考えることが可能になる。

しかし、現在の時点では、一般相対性理論の近似計算で様々な現象が厳密に検証されているため、これらの件についてはあまり強調しない方が賢明である。

5 おわりに

いずれにせよ、今後の基礎物理学を推進するためには、時空、素粒子 (超弦)、相互作用というキーワードだけでなく、次元及び次元の連続化という新たなキーワードで改めて物理学の再構築を考える必要があることを本稿で提案した。

一般相対性理論の柱は「一般相対性原理」と「等価原理」であった。前者は、数学的には、物理法則はすべて一般座標変換に対して共変な形式に書き表さねばならないということである。基本的には、様々な変換に対する不変性、対称性を土台に据えることで物理学は構築されるわけであるが、本稿の第4章で行った議論は、数学的には次元変換に対する不変性を求めていることになる。一方、「等価原理」については、重力という力学的な概念を加速度運動という運動学的な概念に置き換えて、物理学の幾何学化に成功したわけで

あるが、本稿で行った議論は時空の歪みを次元数のずれと捉え直すものである。一般相対性理論は Riemann 幾何学をバックボーンにしたが、本稿で行った議論は量子力学の深い考察から生まれた、次元数を連続化して考える連続幾何学(Continuous Geometry³⁰) が数学的なバックボーンとなるはずである。よって、本稿の議論に則った理論体系の中には、量子論的な本質と一般相対性理論的な重力理論が必然的に含まれていることになる。

【参考文献】

- 1) 吉村高男；時空次元論の構想, 山口県立大津高等学校研究集録, 創刊号, 46-50, 1996
- 2) 吉村高男；空間の次元数と物理法則, 山口県教育財団研究助成報告書, 2000
- 3) 吉村高男；時空次元論序説, 山口福祉文化大学研究紀要 6, 99-107, 2012
- 4) 吉村高男；時空次元と物理学の構成, 日本物理学会中国・四国支部学術講演会講演予稿集, 148, 2013
- 5) 吉村高男；時空次元数の連続化について, 山口福祉文化大学研究紀要 8, 61-70, 2014
- 6) M. Tegmark ; On the Dimensionality of Spacetime, Classical Quantum Gravity, 14, 69, 1997
- 7) F. Englert, R. Brout ; Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, Phys. Rev. Lett. , 13(9), 321, 1964
- 8) P. W. Higgs ; Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, Phys. Rev. Lett. , 13(16), 508, 1964
- 9) G.Aad *et al.* ; A Particle Consistent with the Higgs Boson Observed with the ATLAS Detector at the Large Hadron Collider, Science 338(6114), 1576, 21 Dec. 2012
- 10) Y. Nambu ; Duality and Hydrodynamics, Lectures at the Copenhagen Conference, 1970
- 11) T. Goto ; Relativistic Quantum Mechanics of One-dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Conditions of Dual Resonance, Prog. Theor. Phys 46, 1560. 1971
- 12) T. Yoneya ; Connection of Dual Models to Electrodynamics and Gravidynamics, Prog. Theor. Phys. 51(6), 1907, 1974
- 13) A. Neveu, J. H. Schwartz ; Factorizable Dual Model of Pion, Nucl. Phys. B 31, 81, 1971
- 14) P. Ramond ; Dual Theory for Free Fermions, Phys. Rev. D 3, 2415, 1971
- 15) M. B.Green, J. H. Schwarz ; Anomaly Cancellations in Supersymmetric D=10 Gauge Theory and Superstring Theory, Phy. Lett. B 149, 117, 1984
- 16) M. B. Green, J. H. Schwartz, E. Witten ; Supper String Theory, Cambridge University Press, 1987
- 17) E. Witten; String Theory Dynamics in Various Dimensions, Nucl. Phys. B 443, 85, 1995
- 18) K. Kikkawa, M. Yamasaki ; Effective Actions in String Theory, Prog. Theor. Phys. Suppl. 85, 228, 1985
- 19) M. Kaku ; Introduction to Superstrings and M-Theory, Springer-Verlag New York, Inc., 1999
- 20) E. Witten ; Solutions of Four-Dimensional Field Theories via M-Theory, arXiv: hep-th / 9703166v1 24 Mar. 1997
P. Horava, E. Witten ; Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary arXiv: hep-th / 9603142v1, 21 Mar. 1996
- 21) J. Polchinski ; Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges, Phys. Rev. Lett. 75, 4724, 1995
- 22) S. W. Hawking ; Gravitational Radiation from Colliding Black Holes, Phs. Rev. Lett. 26, 1344, 1971
J. D. Bekenstein ; Black Holes and Entropy, Phy. Rev. D7, 2333, 1973
- 23) A. Strominger, C. Vafa ; Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy, arXiv: hep-th / 9601029v2, 15 Feb. 1996
- 24) J. M. Maldacena; ; Black Holes and D-Branes, Nucl. Phys. Proc. Suppl., 61A, 111, 1998
- 25) 大栗博司；超弦理論入門, 講談社, 2013
- 26) S. M. Kim, J. Nishimura, A. Tuchiya; Expanding (3+1)-

- Dimensional Universe from a Lorentzian Matrix Model for Superstring Theory in (9+1)-Dimensions , Phys. Rev. Lett. 108, 011601, 2012
- 27) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, and A. Tsuchiya ; A Large-N Reduced Model as Superstring, Nucl. Phys. B498, 467, 1997
- 28) D. N. Spergel et al.; First Year WMAP Observations and Determination of Cosmological Parameters, arXiv:astro-ph / 0302209v3, 17 Jun. 2003
- 29) A. D. Sakharov ; Vestnik AN SSSR, 4, 39, 1989
- 30) John von Neumann; Continuous Geometry, Princeton University Press, 1960
- 31) A. Einstein ; Erklärung der Perihelbewegung des Werkraus der Allgemeinen Relativitätstheorie : 「水星の近日点移動に対する一般相対性理論による説明」, S. B. Preuss. Akad. Wiss. , 831, 1915
- 32) 内山龍雄 ; 相対性理論, 岩波書店, 1977
- 33) 佐藤文隆 ; 相対論と宇宙論, サイエンス社, 1984

On the Dimensions – Shift of the Spatial Dimensions and Super Strings –

Takao YOSHIMURA

Abstract

Theories of physics are usually discussed through four (3+1) space-time dimensions. Recently superstring theories predict ten dimensions which are higher than the four dimensions. M-theory, unifying the superstring theories, predicts eleven dimensions. In this paper, the definition of dimensions and the development of superstring theories are reviewed. Then a non-integer, continuous dimension in physics is introduced.

The small shift of three spatial dimensions is connected with the existence of elementary particles, superstrings in this paper. It means that the curvature of space-time in general relativistic theory should be equivalent to the shift of space-time dimensions.

New physics may be built upon “continuous geometry” investigated by J. Von Neumann, using the active continuous dimension of space-time. It may be effective to discuss the beginning of the universe with extremely high energy density, black hole physics, and also extremely high energy reactions of elementary particles.