論　文

複素空間における代数方程式の解の可視化

吉村高男*1

キーワード：複素空間、代数方程式、多項式の零点、解の可視化、多項式関数のグラフ

1　はじめに

代数方程式を解くということは、多項式の零点を求めることと同義である。n 次の代数方程式には、n 個の解が存在する。

二次方程式の解については、実空間座標（x、y）の値を持つ二次関数が x 軸と交わる点が、二つの実数解を示す（図１：$x^2-1=0$ の解）。また、グラフが x 軸と接する時には、二次方程式が重解を持つことを示すことはよく知られていることである。このように、実空間に描かれたグラフを通して、代数方程式の実数解を確認することができる。

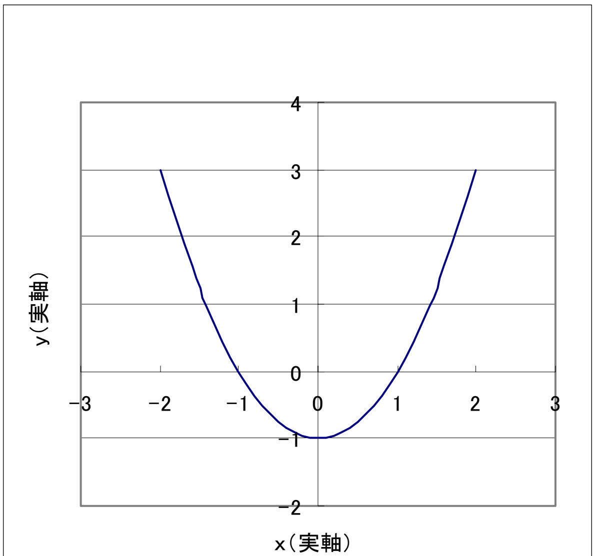

図１　$y=x^2-1$（x 軸と交わる）

しかしながら、$x^2+1=0$ のような方程式の解については、虚数解であるために、$y=x^2+1$ のグラフが実数解のように、x 軸と交わることはない（図２）。

そこで、このような虚数解をグラフの中で、目で見えるように可視化を図りたいと思ったのが、本稿を書くに至った最初の動機である。このことで、代数方程式に対する理解が教育的にも大いに高まると考えたからである。

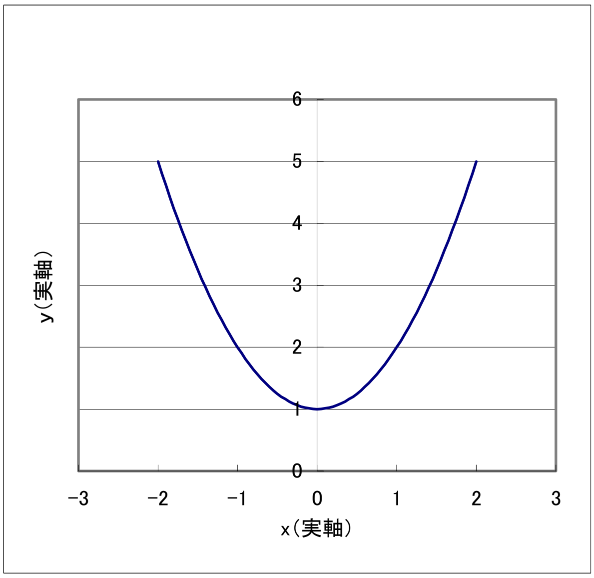

図２　$y=x^2+1$（x 軸と交わらない）

2　虚数解の可視化について

虚数解の可視化を図るためには、独立変数 x の定義域を複素数領域にまで拡張する必要がある。即ち、定義域が二次元的な複素平面になり、定義域の値に対応した関数の値域が定まることになる。

まず、簡単な場合についてイメージ化を図るために、$y=x^2+1$ のグラフについて考える。

定義域が実数と虚数の場合に対応する、それぞれの値域の値を、次の表に示す。この表に対応するグラフ

*1　山口福祉文化大学　ライフデザイン学部

を描いたのが図３である。定義域が複素平面で示されるために、実軸と虚軸が垂直に交わり、放物線がそれぞれの頂点で接しており、「２つでひとつ」のグラフになっていることが特徴的である。

表１　定義域が実数と虚数に対応した値域の値

x 実数	－２	－１	０	１	２
y	５	２	１	２	５
x 虚数	$-2i$	$-i$	０	i	$2i$
y	－３	０	１	０	－３

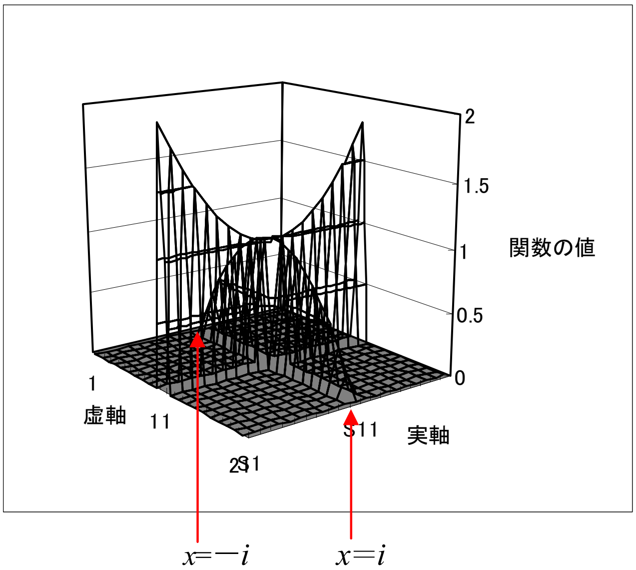

図３　定義域を複素化した y=x^2＋１のグラフ

すでに、述べたように、y=x^2＋１のグラフが、立体的に二つの放物線の頂点（０，１）で接しており、これらがペアを組んでいるパターンを、図３から簡単にイメージすることができる。

さらに、このグラフが、二次方程式の虚数解である虚軸上の座標（i，０）と（$-i$，０）で交わっていることが確認できる。

これこそ、二次方程式の虚数解である x=±i の可視化がなされたものと言える。

３　定義域を複素化した関数のグラフ

ここで、一般的に代数方程式の解を求めること、即ち、多項式の零点を求めるためのイメージ化を図る。定義域としての複素平面に垂直な z 軸方向には、値域の実数部分の値をとるものとする。この三次元的な空間の中で、与えられた関数関係を求める。すると、二次方程式については図４のような曲面で、その関数関係のグラフが表される。

そこで、実軸を含む複素平面に垂直な面と、虚軸を含む複素平面に垂直な面で、図４の曲面をそれぞれ切断すれば、図３で示した関係のグラフ、即ち、ペアになっている「２つでひとつ」のグラフが、それらの切断面の中に入っていることが確認できる。

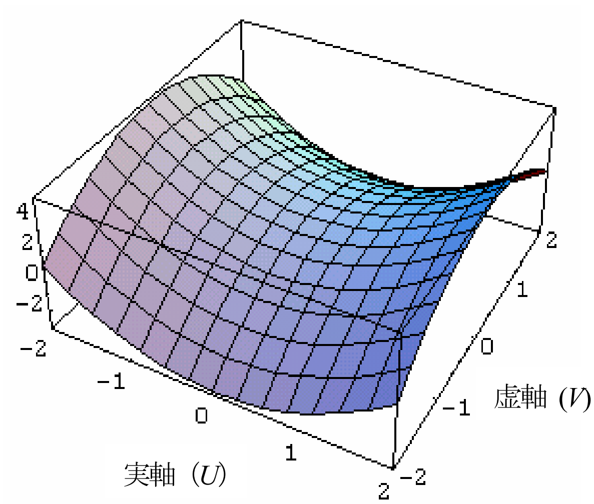

図４　「x^2+１=0 の虚数解」の可視化

～Z=U^2−V^2+1 のグラフ～

Plot 3D［U^2−V^2+1,｛U, −2, 2｝,｛V, −2, 2｝］

by「mathematica」

図４は、$Z=x^2+1$で、x に$U+iV$（U,V：実数）を代入し、Z の実数部分の曲面のグラフを、数式処理ソフト「mathematica」を利用して描いたものである。

同じ手法を用いて、様々な方程式の複素解のイメージを示すことができる。

ここでは、簡単に $x^n=1$の方程式で、指数の値が、$n=2$、3、4の場合について、具体的に解のイメージの可視化を行う。

まず、$x^2=1$の解について議論する。$Z=x^2-1$について、$x=U+iV$（U,V：実数）を代入して、Zの実数部分の関数曲面

$$Z=U^2-V^2-1$$

を描き、上式で $Z=0$の多項式の零点を求める。これが、$x^2=1$の解となる。

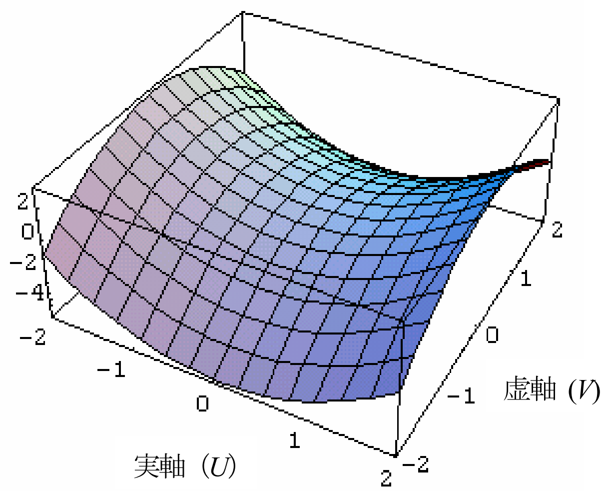

図５　「$x^2=1$の解」の可視化

～$Z=U^2-V^2-1$のグラフ～

図５において、$Z=0$の平面で切断した時に、この関数曲面と交わる点が求める零点であり、その解の座標が図６で示されている。図６は初等代数方程式において、非常に慣れ親しんだ解を示す図である。

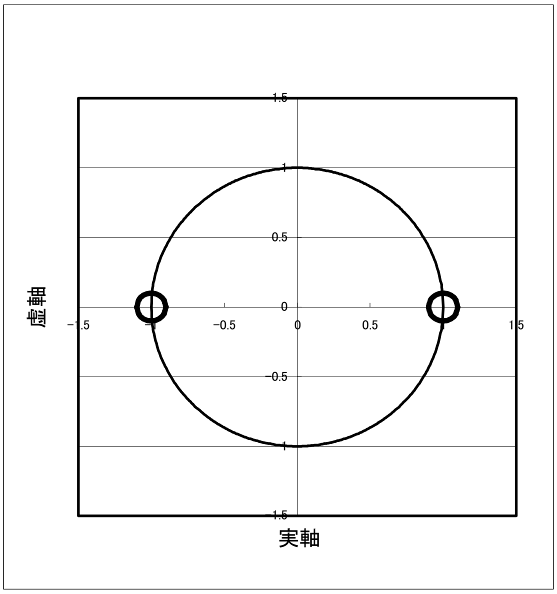

図６　$x^2=1$の解（小さな○の中心座標）

同様に、$x^3=1$の解について議論する。

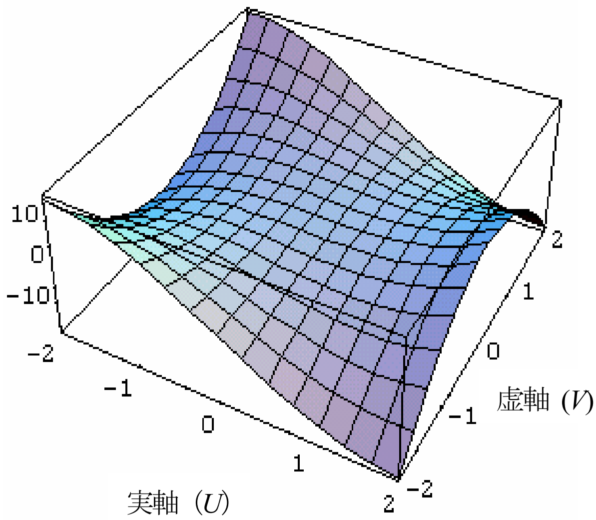

図７「$x^3=1$の解」の可視化

～$Z=U^3-3UV^2-1$のグラフ～

すでに述べてきているように、x のベキ乗の解については、n＝３の時には、図７において、Z＝０の平面で切断した時に、この関数曲面と交わる点が求める零点であり、その解の座標が図８で示される。複素平面における単位円を三等分する座標が、その解になっていることがわかる。

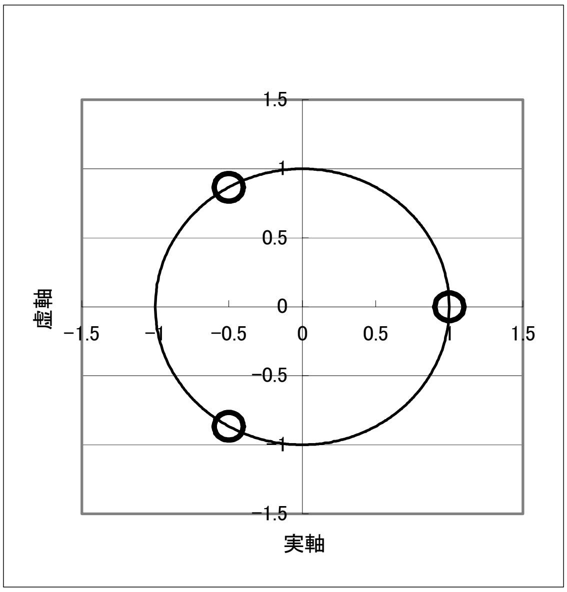

図８　x^3＝１の解（小さな○の中心座標）

同様に、x^4 ＝ １ の解について議論する。「mathematica」を利用して描いたものが図９である。

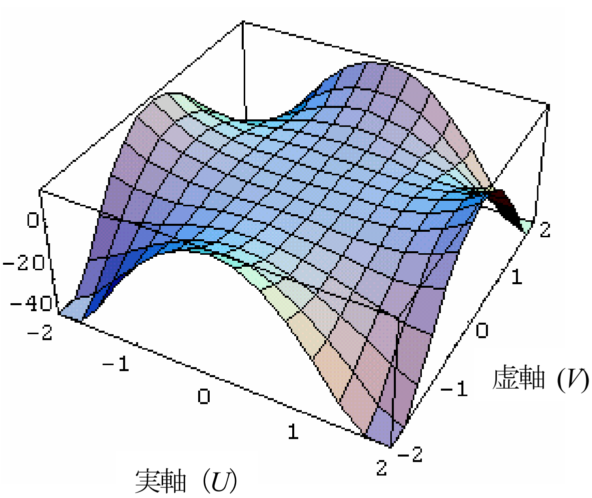

図９　「x^4＝１の解」の可視化

～$Z=U^4+V^4-6U^2V^2-1$ のグラフ～

x^4＝１の解については、図９において、Z＝０の平面で切断した時に、この関数曲面と交わる点が求める零点であり、その解の座標が図１０で示されている。このように、x^n＝１の解については、複素平面上に描かれた単位円を n 等分する座標がその解になる。このことは、代数学的には、ド・モアブルの公式を用いることで直ちに確かめることができる。

より一般的な代数方程式についても、ここで行った手法で、同様の議論が展開できる。

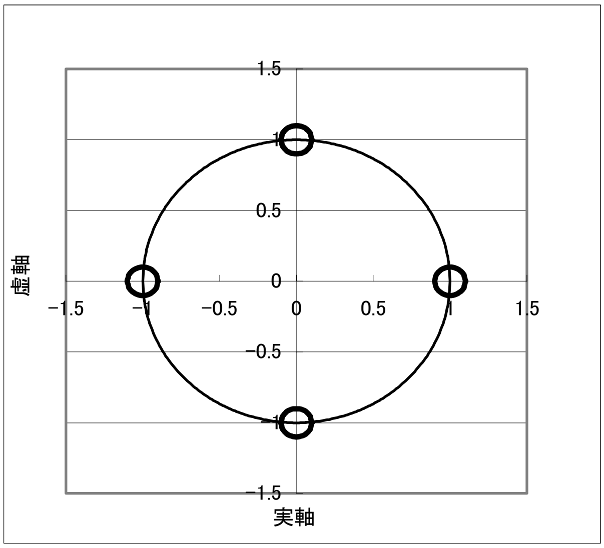

図１０　x^4＝１の解（小さな○の中心座標）

４　おわりに

本稿で述べてきたように、定義域を実数から複素数に拡張することにより、関数のグラフのイメージが、一次元的な曲線から二次元的な曲面に変わる。このようにして、代数方程式の解法について、豊かなイメージが幾何学的に広がる。虚数解が具体的に見えてくるということは、教育的にも大いに意義がある。今までの数学教育では、このような視点が示されておらず、本稿に関する内容の普及を図りたいと考えている。

[参考文献]

1) Stephen Wolfram;「Mathematica」－A System for doing Mthematica by Computer,Wolfram Research Inc.,1991

Bulletin of Yamaguchi University of Human Welfare and Culture, Vol.5, July. 2011

Visualizing Solutions to *n*-th degree Algebraic Equations in the Complex Space

Takao Yoshimura

Abstract：

As we know, n-th degree algebraic equation has n solutions. In these solutions, we can see real solutions crossing real axis in the real space. But we cannot see complex solutions there. When the real domain is expanded into the complex domain, we can see complex solutions easily in the complex space.

The solutions of algebraic equations mean zeros of polynomials. When the domain of function is complex numbers, the domain space is plane. So the functional values of the range form a curved surface. Geometrically, crossing points between the curved surface and the domain plane mean the solutions of the algebraic equation.

When we introduce the complex numbers to the domain, we can visualize the complex solutions of algebraic equations in the complex space.