「集合の集合」考

—指文字から数学の基礎へ—

たなべ・ひでのり

1. 指文字効力の根源

テーマの糸口を担当教科の中にもとめてみる。ろう者福祉で取り上げられる指文字が，手頃な素材となりそうである。まずそれの説明を簡単に加える。

社会福祉の各分野の中で，身障福祉とりわけろう者の福祉が，〝福祉の措置〃体系として最も乏しく方法論的にも遅れている。理由は明らかで，聴覚障害による健常者とのコミュニケーションの壁が，し体不自由・視覚障害等のハンディキャップに比較して，普通考えられる以上に大きく，容易にのり越えられないことによる。

もとよりろう者のコミュニケーションの方法としては，各種のものが考案され，それなりに努力がはらわれている。ただ何れもキメ手を欠き，とりわけ一般社会にまで普及するには難があって停滞を続けることとなる。

口　語（専ら，ろう学校）
手真似（普通，手話と言っている）
指文字（手でなく指の組み合わせ）
トータル・コミュニケーション

これらの比較と停滞の要因については既に他のところで概説しているので，ここでは触れない。上記の中，指文字についてその基本的性格から問題を発してみたい，というのである。

指文字——finger alphabet, finger language この特徴は，はっきりしている。一音一文字，つまり一つの音に一つの指の組み方が対応している。ヒトの話し言葉が，唇の形をすばやく変えて続けて単音を発することによ

り成り立つとすれば，一音一文字の指文字はその機能を十分代用することができる筈である。従って指文字を文字の歴史の上で音節文字に擬すれば，手真似の方は象形文字乃至もっと原始の絵文字に相当すると言えるであろう。

〈両者長短の比較〉

語いが多い……50以下

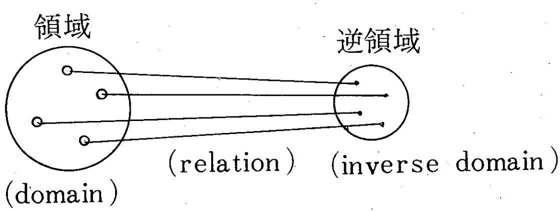
手真似　　　　　　　　　　　　　　指文字

あいまい………正確に表現

指文字効力の根源は，従ってこの一音一文字に在る。もっと一般的な表現をすれば，1対1対応（one to one correspondence）が基本になっているということになる。1対1対応――それは1対多・多対1とともに，もともと人間思考の重要な関係を形成するものであった。（many-one relation）

社会福祉学の展開においても社会科学の他の分野と同様に，原理から各論へ，簡単なものから複雑なものにすすむ方向がとられる。とりわけ福祉の現場・実践体系においては，多様な方策が必要とされる。（manifold measures to be developed）今回はそのコースを逆にとり，具体的なものから抽象的なものをもとめる方向を目指してみたい。担当分野が多岐に分れていても，遡っていたる根源は同一となる筈で，この方向は日常の作業と異なっていても，魅力あふれるものをもっていると思う。

2．1対1対応（1－1 correspondence）



この最も一般的な対応関係は，かの Georg Cantor（1845―1918）が無限の算法にはじめて挑み集合論を創始したときにも，有効な方法としてふんだんに駆使するところとなった。例えば次のように――

$$\begin{array}{cccl} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

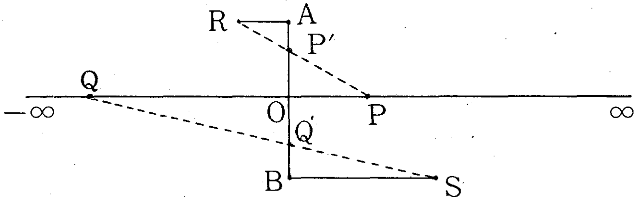
この単純で分かりやすい方法で，しかしながら，常識の枠を超える命題がいとも簡単に導き出せたことをあらためて想い出しておきたい。つまり，部分が全体に等しいというわけで，上の１対１対応の図式はそれの証明にそのまま役立てることができる。すなわち，正の偶数の集合｛2，4，6………｝が，自然数全体の集合｛1，2，3………｝との対応がついていることが容易にみてとれる。同じことが奇数の集合についても示される。一般の場合では次図の如くで，

$$\begin{array}{cccl} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ Ma_1 & Ma_2 & Ma_3 & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

部分集合が集合の全体に等しいという対応関係が成立している。もちろんこれは無限集合の場合にのみ成立することであって，有限の場合には常識通り部分は当然全体に等しくならない（≦）。

以上のことを定理らしく表現すれば，〝Mが無限集合なる時は，自分自身に同等な真部分集合M′を必ず含む。〞ということになる。

１対１対応関係を用いると，集合論の分野ではもっとめざましい証明がなされることを，ついでに見ておこう。次図によって，無限直線と有限線分が点集合という視点からは同等である関係が，理解されよう。



無限直線（—∞，∞）と有限線分ＡＢ（両端を除く）とが同等であることは，ＰとＰ′，ＱとＱ′の１対１対応によって，すなわち０，∞と０Ａ，—∞，０と０Ｂとが１対１対応関係にあることにより，これまた容易に示さ

れる。この場合，線分ＡＢはどれだけ短くとってもよいことになる。

１－１対応関係はこのように集合論の分野で威力を発揮するが，単にそれに止ることなく広く人間思考の基礎に横たわっている。そのこととこの稿の目指すところ――より抽象的なものへと遡る――のために，今一つ重要な考え方を導入しなければならない。〝集合の集合〟(class of classes) といわれるものがそれで，集合論 Mengenlehre から記号論理学 symbolic logic ともつながりをもつ数学基礎論の分野へ足を踏み入れることになる。Georg Cantor の世界を離れて，Peano や Frege の世界を垣間見るという寸法である。作業仮説（working hypothesis）的な言い方をすれば，この両者（１－１対応と集合の集合）をよりどころとして遡るときに，概念の成り立ち――Begriff gestalten と表現するのが適当なような――についての一つの説明法が出てくるように思われる。

３．数の定義――フレーゲ的仕事の示唆するもの

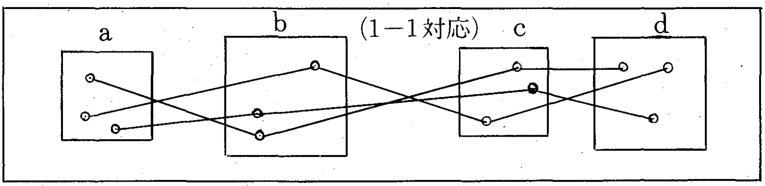
数とは何か。この問に対して最初に公理論的定義を与えたのは，イタリアの数学者 Peano（1858―1932）とされている。ペアノは三つの基本概念（零・数・後者）と五つの基本命題とを与えたが，結局不十分なものであった。０・数・後者という概念が，つきつめると単にその五つの公理を形式的に満たすだけのものにすぎなくなり，いわば変数名辞（Variable）と化してしまうという批判を招いた。従ってより論理的な定義は，ペアノの見掛けだけの仕事を超えた Frege（1848―1925）の手によらなければならなかった。もっとも彼の著書は難解とみなされ，Bertrand Russell（1872―1970）によって（再）発見されるまでこれを読んだ人はほとんどなかったといわれている。B. Russell は次のように言う。[(1)]「数とは何であるか。この疑問は何回となく繰返されてきたが，近世になって漸くそれの正しい解答が与えられた。すなわちフレーゲが彼の著書 Grundlagen der Arithmetik の中で初めてそれを与えている。その書物は簡潔でかつ非常に重要なものであったが，殆ど世人の注意をも惹かず，その中にのべられた数の定義さえも1901年にわたしが見出すまで埋れていた」

Frege の定義は，Peano の仕事がともすれば tautology に堕しがちであったのに対して，真に構成的なものを与えている。そこで採られている論理手法として，〝集合の集合〟の考え方が登場した。それは当初考えられ

たよりもはるかに威力を秘めたものであった。しかしまず数の定義に限定して一べつしよう。

数とは，ある集合の数である。
ある集合の数とは，その集合に相似なすべての集合の集合である。

前段は一見 tautology そのもののように写る。しかし後段と併せ構成すれば，そうでないことが理解される。任意の集合が与えられたとき，それに相似（1対1対応関係を使う）なすべての集合の集合で，それが属するグループを定義することができる。



〈集合の集合〉

グループaとグループbについて，夫々の要素が1対1に対応しているとき，これを集合の相似性 (similarity of classes) と名づける。相似な関係にあるグループ（集合）を，a・b・c・d……の夫々の要素の質 (material) は何であってもよいところに注目したい。miscellaneous (in material) elements でありながら，それらに共通するもの（相似＝1：1対応）が数3となっている。1の場合，2の場合，4の場合又は0（null 集合）の場合も同様に考えることができる。このような分析は，Frege を継承発展させた B. Russell のものを基礎としているが，実のところ Rusell 自身の記述にしてもずっとあっさりしていて，上に述べたところと表現上少し違いがある。例えば——「相似性によって一つにまとめられた集合のある束を，一般に数として定義することができる。従って一つの数とは，その中の任意の二つは互いに相互であるが，それに含まれない集合とは決して相似にならないような一つの集合の集合，さらにいいかえれば数（一般の）とは，それの一つの要素の数として定義されるような集合の集合のことであるとのべられる[(2)]」

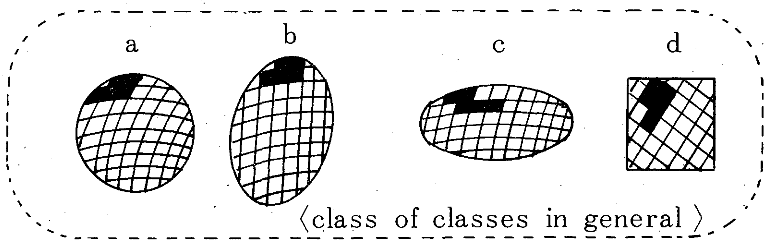
これは考え方の根底に，集合をいわば necessary evil とみなしているところがあることに由来している。こういう言い方が不適当であるならば，B. Russell 自身の言葉を借りて，集合は論理的擬対象（logical fiction）に過ぎないというところに根ざしている。「……集合という言葉を除去できるように定義されなければならない。従って集合を表す記号は，単なる便宜上のもので，集合と名づけられる一つの対象を表しているのではなく，記述のように集合もまた論理的擬対象，すなわち，よくいわれるような一つの不完全記号である[3]」

更に Russell は別の著書において，〝Mathnmatically, a number is nothing but a class of similar classes.〟と断言しながらも，それはともすればパラドックスにおちいる危険があることの指摘を考慮して，class of classes の考え方にやや慎重な態度すらみせている。"To regard a number as a class of classes must apper, at first sight, a wholly indefensible paradox. Thus Peano remarks that we cannot identify the number of 〔a class〕a with the class of classes in question〔i. e. the class of classes similar to a〕, for these objects have different properties. He does not tell us what these properties are, and for my part I am unable to discover them. Probably it appeared to him immediately evident that a number is not a class of classes. But something may be said to mitigate the appearence of paradox in this view. In the first place, such a word as couple or trio obviously does denote a class of classes. Thus what we have to say is, for example, that 'two men' means logical product of class of men and couple. In the second place, when we remember that a class-concept is not itself a collection, but a property by which a collection is defined, we see that, if we define the number as the class-concept, not the class, a number is really defined as a common property of a set of similar classes and of nothing else."[4]

4．集合の集合（class of classes）

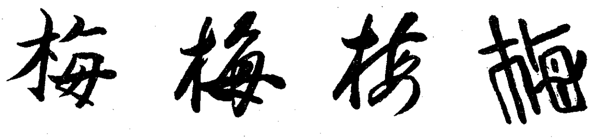
数の定義に限定せず，あるいは数学基礎論的立場に局限しなければ，この class of classes にもっと積極的な役割を認めまたは与えてもいいのではないかということが，多年筆者流作業の前提になっている。もちろん集

合と集合の集合とは，よく言われるように論理型 (logical type) が異るので，同一の立場で考えることはできない。集合を集まりとみようとも(class, set)，単なる collection としようとも，本質的なものではない。問題は class of classes にある。これを logical fiction の一つに由来するものとみずに，“class of” のところを「共通のものを抽出する機能」(as a function to abstract the common properties) と考えたい。class と class-concept の違いというに止めず，一つの大切な機能を担うもの (classes の identity を引き出すものという表現もできようその機能) と (logically) active meaning をもたせてみる。その方が，数の定義を離れて，一般の concept 構成に fruitful product がでてくるように思われる。



上図のうち黒い枠部分を共通のもの (内包)，白い部分を共通でない夫々に特有の性質とすれば，a , b , c , d ,…は外延をあらわすことになる。この場合 class of classes をとると，内包が抽出されて出てくる。あるいは抽出される機能が class (of classes) にあると考える。(= concept) 伝統的論理学の概念構成を class (of classes) の機能するものとみなすことによって，論理の一般化 (generalization) が行われることとなる。

もともと人間の思考には，この過程による abstraction がつきものである。肝心なその能力を，例えばコンピューターはなかなかみたすことができない。所謂パターン認識の難しさである。



どのように書いても，お互いは同じ文字と認識できるが，このようなパターンの違いによる identity を見ぬくには，かなり高度の思考力を要する。そしてこの場合も，class of classes を適用してみれば，やはり “class of” に function to abstract があるということになろう。

（註）

(1) 「数理哲学序説」ラッセル著・平野訳（1920年第2版），1954年，p. 22.
(2) 同上，p. 31.
(3) 同上，p. 238.
(4) The Principles of Mathematics by Bertrand Russell, second edition 1937, p. 115.

（参考書）

○辻政次，集合論（昭8・改訂昭40）
○集合と位相 I・II，岩波講座（1976年）
○幾何学基礎論，ヒルベルト・中村訳（昭44）
○論理学，速水滉（昭7改訂版）
○論理学入門，岩波全書（1979年）
○ヒルベルト・アッケルマン，記号論理学の基礎（1949年），伊藤訳（1954年）
○Whitehead & Russell, Principia Mathematica, second edition 1927.
（ただし手許にあるのは縮刷版）