ラプラス変換の振動系，梁，積分方程式その他への応用

第5報 長 柱 へ の 応 用（I）

望 月 太喜雄*

On the Application of Laplace Transform to the Dynamical Vibrations, Beam Problems, Integral Equations and etc. (No. 5)

Application to Long Columns (1)

Takio MOCHIZUKI

Abstract

The method of Laplace transformation offers a powerful technique also for the columm problems.

This report tenders a few illustrations and the results of calculations obtained from the problems of uniform and nonuniform columns. Furthermore a few results concerned with the case of columns carrying an eccentric, oblique load are also included here.

In the case of nonuniform columns, i. e., columns of several sections, it is very convenient to express equations in matrix form. By repeated multiplication of the matrices, quantities at station n can be expressed in terms of corresponding quantities at station O.

1. まえがき

初期値＝0の条件がラプラス変換をしてその威力を最も効果的に発揮せしめるということは周知の事実であり，従って，ラプラス変換を導入すれば一つの統一的方法をもって解を機械的に，容易に求め得る場合が多い．ところでラプラス変換を長柱に応用した文献[1)2)]は余り見受けられない．Thomson 氏（ミシガン大学）は一様断面をもたない長柱（ここではn個の異る部分から成り立つ柱の意味）に関してその一般解をマトリクスを用いてまとめられている。しかし個々の場合に就いてすべて触れられている訳ではない．また偏心荷重や偏心斜荷重を受ける場合については触れられていない．

筆者は本報では一様断面をもつ長柱の一般的解法，さらに一様断面をもたない長柱，とくに2個もしくは3個の異る部分から成りたつ長柱が軸心圧縮荷重を受ける場合の弾性座屈について主として計算し，偏心荷重や偏心斜荷重を受ける場合についても計算を試みた．ここにそのまとめも含めてその計算例の一文を呈する次第である．

* 宇部工業高等専門学校機械工学科

2. 一様断面を有する長柱の一般的解法

以下の計算において使用する記号およびその符号については第2報[3)]のそれに準ずるものとする．たとえばPは圧縮力，Qは剪断力，Mは曲げモーメントを示し，Mは柱の弾性曲線がy軸の負の方向に対して凸のときを正と約束する．（Fig. 1）

したがって

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI} \tag{1}$$

よって Fig. 1 において（任意の端末条件を許す）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{P}{EI}y+\frac{M(0)}{EI}-\frac{Q}{EI}x \tag{2}$$

$P/EI=\beta^2$ とおき(2)式をラプラス変換すると

$$s^2\bar{y}(s)-sy(0)-y'(0)=-\beta^2\bar{y}(S)+\frac{M(0)}{EIS}-\frac{Q}{EIS^2}$$

一般に $y(0)=0$，よって弾性曲線の補助方程式は

$$\bar{y}(s)=\frac{y'(0)}{S^2+\beta^2}+\frac{M(0)}{S(S^2+\beta^2)EI}-\frac{Q}{S^2(S^2+\beta^2)EI} \tag{3}$$

よって撓み曲線の式は

$$y(x)=\frac{y'(0)}{\beta}\sin\beta x+\frac{M(0)}{EI\beta^2}(1-\cos\beta x)-\frac{Q}{EI\beta^3}(\beta x-\sin\beta x) \tag{4}$$

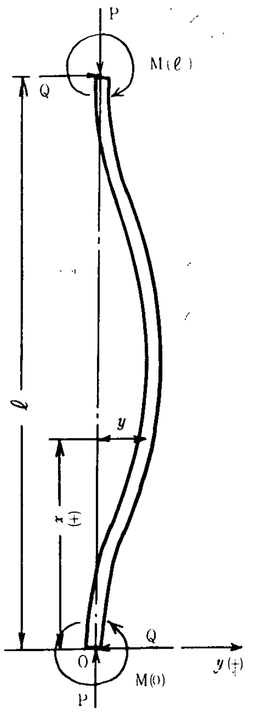


Fig. 1 Uniform column

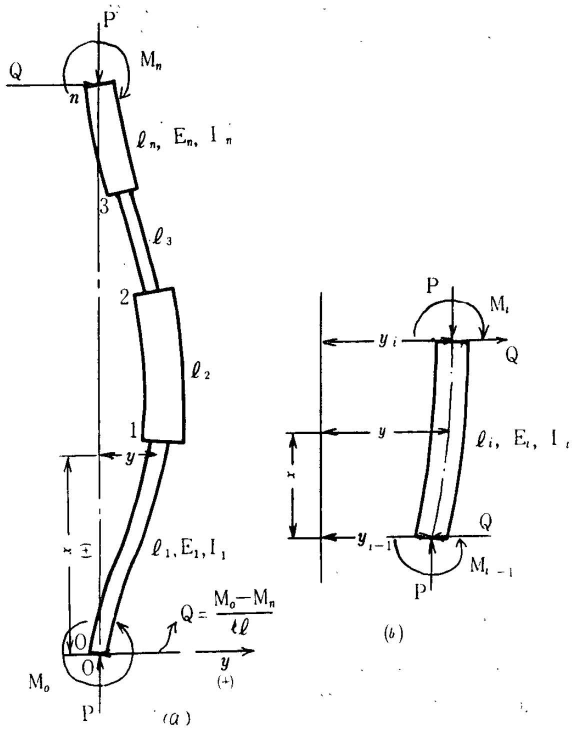


Fig. 2 Nonuniform column
(Column of several sections)

$y'(0)$, $M(0)$ は未定の係数で両端の支持条件より直ちに求めうるものである.

3. 変化断面を有する長柱の一般的解法

変化断面を有する場合については Thomson 氏がその著書[1]において述べられているのでここでは主な事項について略記することにとどめる.

Fig. 2 (a) に n 個の変化断面を有する長柱を示し, Fig. 2 (b) にその i 番目の部分を示す. Fig. 2 (b) において明らかに

$$E_iI_i\frac{d^2y}{dx^2}=-P(y-y_{i-1})+M_{i-1}-Qx \qquad (5)$$

上式をラプラス変換して $y(0)=y_{i-1}$ に注意すれば i 番目の部分の弾性曲線の補助方程式は

$$\bar{y}(s)=\frac{y_{i-1}}{S}+\frac{y'_{i-1}}{S^2+\beta_i{}^2}+\frac{M_{i-1}}{E_iI_iS(S^2+\beta_i{}^2)}-\frac{Q}{E_iI_iS^2(S^2+\beta_i{}^2)} \qquad (6)$$

(ただし $\beta_i{}^2=P/E_iI_i$)

よって i 番目の部分の撓み曲線の式は

$$y(x)=y_{i-1}+\frac{y'_{i-1}}{\beta_i}\sin\beta_ix+\frac{M_{i-1}}{E_iI_i\beta_i{}^2}(1-\cos\beta_ix)-\frac{Q}{E_iI_i\beta_i{}^3}(\beta_ix-\sin\beta_ix) \qquad (7)$$

(7)式を 1 回もしくは 2 回微分して $x=l_i$ とおくことにより y_i', M_i を求めうる. これらより次式を導き得る.

$$\begin{pmatrix} y \\ y'_i \\ M_i \\ Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sin\beta_i\ell_i}{\beta_i} & \dfrac{1-\cos\beta_i\ell_i}{E_iI_i\beta_i{}^2} & -\dfrac{\beta_i\ell_i-\sin\beta_i\ell_i}{E_iI_i\beta_i{}^3} \\ 0 & \cos\beta_i\ell_i & \dfrac{\sin\beta_i\ell_i}{E_iI_i\beta_i} & -\dfrac{1-\cos\beta_i\ell_i}{E_iI_i\beta_i{}^2} \\ 0 & -E_iI_i\beta_i\sin\beta_i\ell_i & \cos\beta_i\ell_i & -\dfrac{\sin\beta_i\ell_i}{\beta_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y'_{i-1} \\ M_{i-1} \\ Q \end{pmatrix} \qquad (8)$$

(8)式を繰り返し用いることによりn番目の部分の諸元を0番目の諸元で表わしうる．すなわち

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y'_n \\ M_n \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ M_0 \\ Q \end{pmatrix} \qquad (9)$$

上式は柱の両端の境界条件を代入することにより柱の特性方程式を与え，これより座屈荷重を求め得る．すなわち β の固有値が求まる．また β の固有値を代入すれば弾性曲線 $y(x)$ は固有関数を示すことになる．

4．計　算　例

4・1　断面一様な長柱が偏心斜荷重を受ける場合

Fig. 3において柱は対称断面を有し，Pの向きは断面の主軸方向に一致するものとし，aは偏心量を示し，柱は僅かな撓み量 δ で釣合っているものとする．

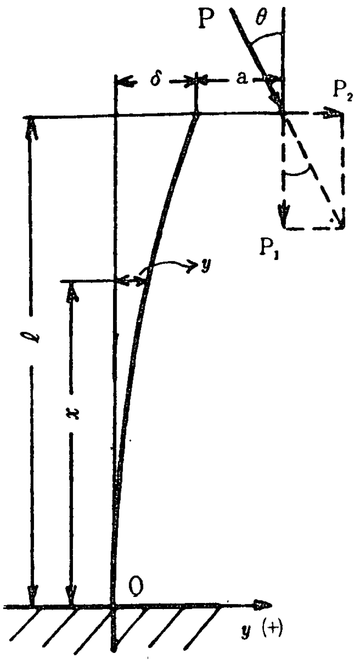


Fig. 3　Uniform column subjected to an eccentric, oblique load

（解）　上述の「一様断面を有する長柱の一般的解法」を用いることにする．

(4)式に境界条件 $\begin{cases} y'(0)=0 \\ M(0)=P_2\ell+P_1(a+\delta) \end{cases}$

を代入すれば弾性曲線の式は

$$y(x)=\frac{P_2\ell+P_1(a+\delta)}{EI\beta^2}(1-\cos\beta x)-\frac{P_2}{EI\beta^3}(\beta x-\sin\beta x)$$
$$=(\ell\tan\theta+a+\delta)(1-\cos\beta x)-\frac{\tan\theta}{\beta}(\beta x-\sin\beta x) \qquad (10)$$

（ただし $\beta^2=P_1/EI$，$Q=P_2$）

(10)式に $y(\ell)=\delta$ を代入すれば

$$\delta=(\ell\tan\theta+a+\delta)(1-\cos\beta\ell)-\frac{\tan\theta}{\beta}(\beta\ell-\sin\beta\ell)$$

$\cos\beta\ell\neq 0$ より次式を得る．すなわち

$$\delta=\frac{1}{\cos\beta\ell}\left(a-\ell\tan\theta\cos\beta\ell-a\cos\beta\ell+\frac{1}{\beta}\tan\theta\sin\beta\ell\right) \qquad (11)$$

したがって

$$\lim_{\beta\ell\to\frac{\pi}{2}(2n+1)}\delta=\lim_{\beta\ell\to\frac{\pi}{2}(2n+1)}\frac{a+(-1)^n(1/\beta)\tan\theta}{\cos\beta\ell}=\infty$$

（ただし $n=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$）

よって座屈荷重は $\beta\ell>0$ の最小値，すなわち第一座屈荷重（$n=0$）である故　$\beta\ell=\pi/2$

ところで $\beta^2=P_1/EI$　よって $P_{1cr}=\pi^2EI/4\ell^2$

よって偏心斜荷重に対する座屈荷重は

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4\ell^2\cos\theta} \qquad (12)$$

δ の値を(10)式に代入すれば撓み曲線の式は

$$y(x)=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{1}{\cos\beta\ell}(\tan\theta\sin\beta\ell+a\beta)(1-\cos\beta x)-\tan\theta(\beta x-\sin\beta x)\right\} \qquad (13)$$

結論として得たことをまとめてみると(12)式の値は偏心の無い斜荷重の場合のそれと一致し，これはまた偏心垂直荷重の場合の座屈荷重が偏心の無い場合のそれと一致することと対応する．しかしそれぞれの場合において撓み曲線はすべて互に異ることは言うまでもない．

4・2　変化断面を有する長柱（両端固定の場合）

(9)式に境界条件

$$y_n=y_0=y_n'=y_0'=0 \qquad (13)$$

を代入すると（Fig. 4）

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_n \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q \end{pmatrix} \qquad (14)$$

同次方程式において $M_0=Q=0$ 以外の根をもつためには

$$\begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{24} \end{vmatrix}=0 \qquad (15)$$

（特性方程式）

勿論 $M_0=Q=0$ のときは(14)式は成立しかつすべての値はゼロで当然 $y(x)$ もゼロ．これは柱が真直な状態での釣合を示すが(15)式は $M_0=Q=0$ 以外にも釣合の状態が，すなわち柱が撓んだ状態での釣合が存在することを示す．

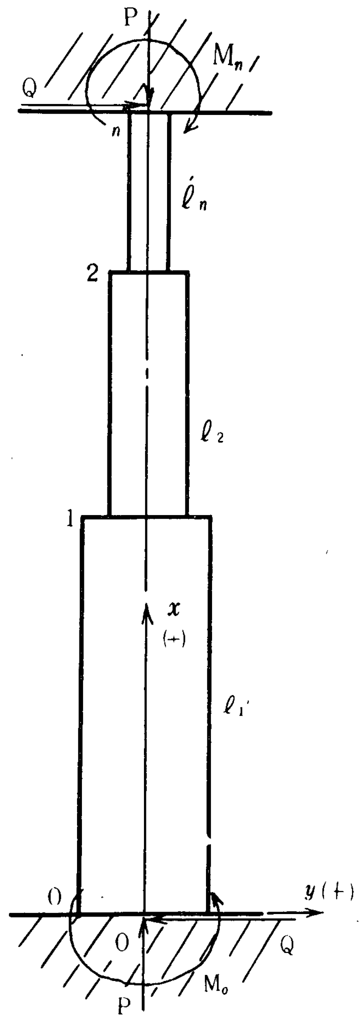


Fig. 4 Nonuniform column with both ends fixed

(i)　$n=1$ の場合

(15)式より

$$-\frac{1}{E_1{}^2I_1{}^2\beta_1{}^4}(1-\cos\beta_1\ell_1)^2 + \frac{1}{E_1{}^2I_1{}^2\beta_1{}^4}\sin\beta_1\ell_1(\beta_1\ell_1-\sin\beta_1\ell_1)=0$$

$\cos(\beta_1\ell_1/2)\neq 0$ より座屈方程式は

$$\sin\frac{\beta_1\ell_1}{2}\left(\tan\frac{\beta_1\ell_1}{2}-\frac{\beta_1\ell_1}{2}\right)=0 \tag{16}$$

よって

$$\sin\frac{\beta_1 l_1}{2}=0 \quad \text{or} \quad \tan\frac{\beta_1\ell_1}{2}=\frac{\beta_1\ell_1}{2}$$

$\beta_1\ell_1>0$ の最小値は夫々 $\beta_1\ell_1=2\pi$ or $\beta_1\ell_1=8.9868>2\pi$ また $\beta_1{}^2=P/E_1I_1$，よって座屈荷重（固有値）は

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2E_1I_1}{\ell_1{}^2} \tag{17}$$

(ii)　$n=2$ 場合

(8)および(14)式に代入して

$$\begin{pmatrix}0\\0\\M_2\\Q\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\beta_2\ell_2}{\beta_2} & \frac{1-\cos\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2{}^2} & -\frac{\beta_2\ell_2-\sin\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2{}^3} \\ 0 & \cos\beta_2\ell_2 & \frac{\sin\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2} & -\frac{1-\cos\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2{}^2} \\ 0 & -E_2I_2\beta_2\sin\beta_2\ell_2 & \cos\beta_2\ell_2 & -\frac{\sin\beta_2\ell_2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\beta_1\ell_1}{\beta_1} & \frac{1-\cos\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1{}^2} & -\frac{\beta_1\ell_1-\sin\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1{}^3} \\ 0 & \cos\beta_1\ell_1 & \frac{\sin\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1} & -\frac{1-\cos\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1{}^2} \\ 0 & -E_1I_1\beta_1\sin\beta_1\ell_1 & \cos\beta_1\ell_1 & -\frac{\sin\beta_1\ell_1}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\M_0\\Q\end{pmatrix} \tag{18}$$

(15)式に代入して計算すれば座屈方程式は

$$2\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2-\frac{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}{\beta_1\beta_2}\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2-1+(\ell_1+\ell_2)\times(\beta_1\sin\beta_1\ell_1\cos\beta_1\ell_1+\beta_2\sin\beta_2\ell_2\cos\beta_1\ell_1)=0 \tag{19}$$

$$2-\frac{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}{\beta_1\beta_2}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2-\sec\beta_1\ell_1\sec\beta_2\ell_2+(\ell_1+\ell_2)\times(\beta_1\tan\beta_1\ell_1+\beta_2\tan\beta_2\ell_2)=0 \tag{20}$$

（ただし $\beta_1=P/E_1I_1$，$\beta_2=P/E_2I_2$）

よって E_1，E_2，I_1，I_2，ℓ_1，ℓ_2 を与えれば座屈荷重（$\beta\ell>0$ における最小値すなわち第一座屈）P_{cr} を求め得る．

(iii)　$n=3$ の場合

(8)および(14)式に代入して

$$\begin{pmatrix}0\\0\\M_3\\Q\end{pmatrix}=$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & \sin\beta_3\ell_3 & (1-\cos\beta_3\ell_3)/(E_3I_3\beta_3{}^2) & -(\beta_3\ell_3-\sin\beta_3\ell_3)/(E_3I_3\beta_3{}^3) \\
0 & \cos\beta_3\ell_3 & \sin\beta_3\ell_3/(E_3I_3\beta_3) & -(1-\cos\beta_3\ell_3)/(E_3I_3\beta_3{}^2) \\
0 & -E_3I_3\beta_3\sin\beta_3\ell_3 & \cos\beta_3\ell_3 & -\sin\beta_3\ell_3/\beta_3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix}
1, & \text{—}, & \dfrac{1-\cos\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1{}^2}+\dfrac{\sin\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1\beta_2}\sin\beta_2\ell_2+\dfrac{\cos\beta_1l_1}{E_2\mathrm{I}_2B_2{}^2}(1-\cos\beta_2\ell_2), \\
0, & \text{—}, & \dfrac{\sin\beta_1\ell_1}{E_1I_1\beta_1}\cos\beta_2\ell_2+\dfrac{\sin\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2}\mathrm{eos}\beta_1\ell_1 & , \\
0; & \text{—}, & -\dfrac{E_2I_2\beta_2}{E_1I_1\beta_1}\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2+\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2 & , \\
0, & 0\ , & 0 & ,
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-\dfrac{(\beta_1\ell_1-\sin\beta_1\ell_1)}{E_1I_1\beta_1{}^3}-\dfrac{\sin\beta_2\ell_2}{E_1I_1\beta_1{}^2\beta_2}(1-\cos\beta_1\ell_1)-\dfrac{(1-\cos\beta_2\ell_2)}{E_2I_2\beta_2{}^2\beta_1}\sin\beta_1\ell_1-\dfrac{\beta_2\ell_2-\sin\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2{}^3} \\
-\dfrac{\cos\beta_2\ell_2}{E_1I_1\beta_1{}^2}(1-\cos\beta_1\ell_1)-\dfrac{\sin\beta_1\ell_1\ \sin\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2\beta_1}-\dfrac{1-\cos\beta_2\ell_2}{E_2I_2\beta_2{}^2} \\
\dfrac{E_2I_2\beta_2{}^2}{E_1I_1\beta_1{}^2}(1-\cos\beta_1\ell_1)\sin\beta_2\ell_2-\dfrac{1}{\beta_1}\sin\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2-\dfrac{1}{\beta_2}\sin\beta_2\ell_2 \\
1
\end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q \end{pmatrix} \qquad (21)
$$

(15)式に代入して計算すれば座屈方程式は

$$
\begin{aligned}
&2\sec\beta_1\ell_1\sec\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3-1-\frac{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}{\beta_1\ell_2}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2\sec\beta_1\ell_1\,\mathrm{see}\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3 \\
&-\tan^2\beta_1\ell_1\tan^2\beta_2\ell_2-\frac{\beta_2{}^2+\beta_3{}^2}{\beta_2\beta_3}\tan\beta_2\ell_2\tan\beta_3\ell_3\sec\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3\sec\beta_1\ell_1-\tan^2\beta_2\ell_2\tan^2\beta_3\ell_3 \\
&-\frac{\beta_1{}^2+\beta_3{}^2}{\beta_1\beta_3}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_3\ell_3\sec\beta_1\ell_1\sec\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3-\tan^2\beta_1\ell_1\tan^2\beta_3\ell_3+\frac{\beta_1{}^2-\beta_2{}^2}{\beta_1\beta_2}\tan^2\beta_3\ell_3 \\
&\times\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2-\sec^2\beta_1\ell_1\sec^2\beta_2\ell_2\sec^2\beta_3\ell_3+(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\beta_1\sec\beta_1\ell_1 \\
&\times\sec\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3\tan\beta_1\ell_1-\tan^2\beta_1\ell_1+(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\beta_2\sec\beta_1\ell_1\sec\beta_2\ell_2 \\
&\times\sec\beta_3\ell_3\tan\beta_2\ell_2-\tan^2\beta_2\ell_2-(\ell_1+\ell_2+\ell_3)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta_2}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2\tan\beta_3\ell_3 \\
&\times\sec\beta_1\ell_1\sec\beta_2\ell_2\sec\beta_3\ell_3-\tan^2\beta_1\ell_1\tan^2\beta_2\ell_2\tan^2\beta_3\ell_3+(\ell_1+\ell_2+\ell_3) \\
&\times\beta_3\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2\tan^2\beta_3\ell_3\sec\beta_1\ell_1\,\mathrm{see}\beta_2\ell_2-\tan^2\beta_3\ell_3 \\
&=0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

4・3 偏心斜荷重を受ける変化断面を有する長柱 (一端固定，他端自由の場合)

Fig. 5（微小撓み δ で釣合っているものとする）において境界条件は

$$y_0=y_0'=0 \quad (23) \qquad M_2=P_1a \quad (24)$$

(9)式に代入すると

$$
\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ P_1a \\ Q \end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
1 & A_{12} & \mathrm{A}_{13} & A_{14} \\
0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\
0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \\ Q \end{pmatrix} \qquad (25)
$$

よって　$P_1a=A_{33}M_0+A_{34}Q$　(26)

ところで　$M_0=P_2l+P_1(a+\delta)$，$Q=P_2$　(27)

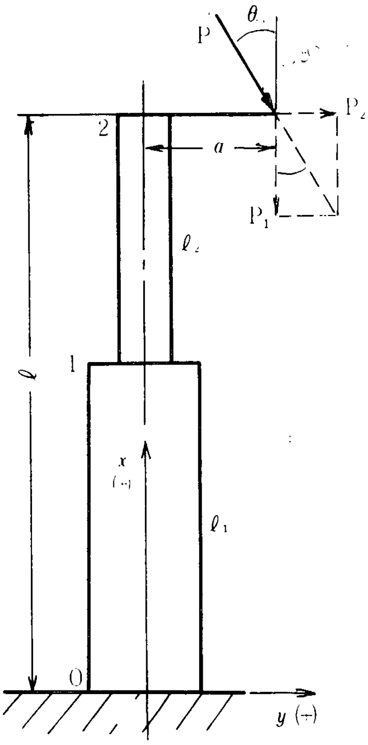


Fig. 5 Nonuniform column subjected to an eccentric, oblique load

(27)を(26)式に代入して δ を計算すれば

$$\delta=\{(a-A_{34}\tan\theta)/A_{33}\}-\ell\tan\theta-a \qquad (28)$$

また

$$A_{33}=-(\beta_1/\beta_2)\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2+\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2$$

$$A_{34}=-(1/\beta_2)(1-\cos\beta_1\ell_1)\sin\beta_2\ell_2-(1/\beta_1)\sin\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2-(1/\beta_2)\sin\beta_2\ell_2$$

A_{33}, A_{34} を(28)式に代入すれば

$$\delta=\frac{a+\{(1/\beta_2)(1-\cos\beta_1\ell_1)\sin\beta_2\ell_2+(1/\beta_1)\sin\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2+(1/\beta_2)\sin\beta_2\ell_2\}\tan\theta}{-(\beta_1/\beta_2)\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2+\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2}-\ell\tan\theta-a \qquad (29)$$

よって

分母$=-(\beta_1/\beta_2)\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2+\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2=0$

のとき，すなわち

$$\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2=\beta_2/\beta_1 \qquad (30)$$

のときはδは∞になる．（ただし $\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2\neq 0$，かつ $\cos\beta_1\ell_1\cos\beta_2\ell_2-(\beta_1/\beta_2)\sin\beta_1\ell_1\sin\beta_2\ell_2>0$）

よって(30)式より求まる座屈荷重相当値（第1座屈）P_1 に $\sec\theta$ を乗じた値が $n=2$ の場合の偏心斜荷重を受ける変化断面長柱の座屈荷重となる．またこれは $n=2$ の変化断面を有する長柱が軸心斜荷重を受ける場合のそれと一致する．すなわち $n=1$ の場合と同様，座屈荷重は偏心に無関係になることと対応する．

む す び

柱の問題の場合，短柱を除いて，すべて柱が曲った状態で釣合条件式を作らねばならない．そうすると問題は線形性を失い，非線形となり，フックの法則が成立する弾性体であっても前報まで用いた重ね合せの原理が成立しなくなることは，極めて重要なことである．

次に以上の計算より結論として得たことを列挙する．

1）断面一様でない長柱（両端回転端，両端固定，一端固定・他端回転端，一端固定・他端自由）に関して，$n=2\sim3$ に対する座屈方程式を求めることができた．

（両端回転端および一端固定・他端自由の場合の $n=2$ に対する座屈方程式に就いては既に Thomson 氏および Timoshenko 氏により夫々の解が明らかにされているが，本報の解はそれらの解と一致した．）

2）数個の部分より成る断面一様でない長柱の場合も断面一様の柱の場合と同様，座屈荷重は偏心の有無に無関係になることが分った．もちろん撓みの生ずる状態は偏心の有無により大いに異ることはいうまでもない．筆者の計算したその他のものを Table 1 に示す．$n=1$ に対する解は既に明らかであるが比較のために載せることにした．

また，その他の文献の中で特に本題に対して種々の有益なるヒント内至アドバイスを受けた文献図書名[3)~6)]をここに挙げておく次第である．

参 考 文 献

1）W. T. Thomson；"Laplace Transformation" p.115, 丸善,（1962

2）小井土正六；"材料力学演習"，p. 189, 学献社，(1963)

3）S. Timoshenko；"Strength of Materials", Vol. II, p. 160, D. Van Nostrand Co.,（1956)

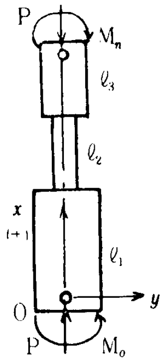
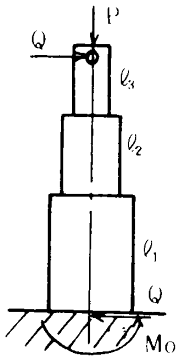
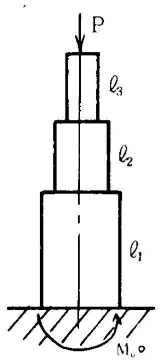
4）平修二；"現代材料力学"，p. 176, オーム社,（1970)

5）丹羽義次外共著；"構造力学"，Vol. 1，p. 258（1966)

6）チモシエンコ；". 座屈理論"，p. 89, コロナ社,（1953)

（昭和46年9月20日受理）

Table 1 Critical load equation of nonuniform columns.

Type of the columns	Form	Characteristic equation		Crictical load equation
Pinned ends		$A_{12}=A_{32}=0$	n= 1	$\sin\beta_1\ell_1=0$
			n= 2	$\frac{\tan\beta_1\ell_1}{\beta_1}=-\frac{\tan\beta_2\ell_2}{\beta_2}$ (Thomson)
			n= 3	$\frac{1}{\beta_1}\tan\beta_1\ell_1+\frac{1}{\beta_2}\tan\beta_2\ell_2+\frac{1}{\beta_3}\tan\beta_3\ell_3-\frac{\beta_2}{\beta_1\beta_3}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2\tan\beta_3\ell_3=0$
One end fixed, the other pinned		$\begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{34} \end{vmatrix}=0$	n= 1	$\tan\beta_1\ell_1=\beta_1\ell_1$
			n= 2	$\frac{1}{\beta_1}\tan\beta_1\ell_1+\frac{1}{\beta_2}\tan\beta_2\ell_2+\frac{\beta_1}{\beta_2}(\ell_1+\ell_2)\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2+(\ell_1+\ell_2)=0$
One end fixed, the other free		$A_{33}=0$	n= 1	$\cos\beta_1\ell_1=0$
			n= 2	$\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_2\ell_2=\beta_2/\beta_1$ (Timoshenko, Vol. II)
			n= 3	$\frac{\beta_1}{\beta_2}\tan\beta_1\ell_1\tan\beta_3\ell_2+\frac{1}{\beta_3}\tan\beta_3\ell_3(\beta_1\tan\beta_1\ell_1+\beta_2\tan\beta_2\ell_2)-1=0$

（ただし $\beta_i=P/E_iI_i$）