ラプラス変換の振動系，梁，積分方程式その他への応用

第4報　梁の横振動への応用（Ⅱ）

望月　太喜雄*

On the Application of Laplace Transform to the Dynamical Vibrations, Beam Problems, Integral Equations and etc. (No.4)

Transverse Vibration of Beams (Ⅱ)

Takio Mochizuki

Abstract

Continued from the 3rd report this offers a few illustrations and the results of calculations obtained from problems of the transverse vibration of basic beams (simple beam, cantilever, fixed beam) subjected to uniformly distributed loads and couples such as a periodic load $w_0 \sin\omega t$, an impulsive one $M_0 u'(t)$, and a rapid one $M_0 u(t)$ and so forth.

Passing all the calculations of residues (Report No. 3, No. 4) in review, one of the most important results acquired is the fact that no double poles appeared through these calculations.

1. まえがき

ラプラス変換の梁の横振動への応用については前報にも述た如く Churcill 氏（ミシガン大学）[1]，Thomson 氏（カリフォルニア大学）[2]，亘理氏（東京大学）[3]等により，種々の解が求められているが，分布荷重や集中モーメント等が梁に加わる場合については触れられていない．また梁に急速荷重，例えば急速集中モーメント $M_0 u(t)$ 等が加わる場合についても触れられていない．

筆者は Thomson 氏の解法に従い，ユニットステップ，ユニットインパルスおよびユニットダブレット関数を用いて，上記の著書[1)2)3)]には触れられていない不静定梁の場合も取り上げ，非定常項も含めた完全解を求めることを試みた．

本報は前報に続いて，両端自由支持，片持，両端固定梁の3つの場合に対して，等分布荷重，集中モーメントが周期的荷重（$w_0 \sin\omega t$, $M_0 \sin\omega t$），衝撃的荷重（$w_0u'(t)$, $M_0u'(t)$），急速荷重（$w_0u(t)$, $M_0u(t)$）の形で夫々加わる場合の計算結果である．

以上の場合のまとめも含めてここにその計算例の一文を呈する次第である．

2. 計算例

（1）両端固定梁が周期的等分布荷重 $w_0 \sin\omega t$ を受ける場合（非定常状態も含めた完全解）

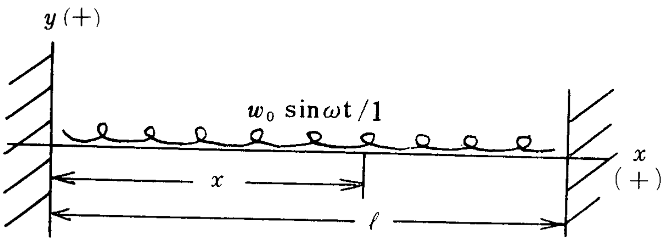


Fig. 1

* 宇部工業高等専門学校機械教室

(解) Fig. 1 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=-w_0\,u(x)\sin\omega t$$
$$=-w_0\,F(t) \qquad (1\cdot1)$$

最初，梁は静止の状態にあり，弾性曲線は直線であると仮定すると初期条件は

$$y(x,0)=y'_t(x,0)=0 \qquad (1\cdot2)$$

境界条件は
$$\begin{cases} y(0,t)=y'_x(0,t)=0 & (1\cdot3)\\ y(l,\ t)=y'_x(l,\ t)=0 & (1\cdot4)\end{cases}$$

(1・1), (1・3), (1・4) 式を t についてラプラス変換すると

$$\bar f(x,\ s)=-w_0\bar F(s) \qquad (1\cdot5)$$
$$\bar y(0,\ s)=\bar y'_x(0,\ s)=0 \qquad (1\cdot6)$$
$$\bar y(l,\ s)=\bar y'_x(l,\ s)=0 \qquad (1\cdot7)$$

(1・2)式を第3報[4)], (2・3)式に代入すると

$$\bar\phi(x,\ s)=\frac{m}{EI}\left\{s\cdot u_1(x)+v_1(x)\right\}+\frac{\bar f(x,\ s)}{EI}$$
$$=-\frac{w_0\bar F(s)}{EI} \qquad (1\cdot8)$$

(1・6), (1・8) 式を第3報, (2・6) 式に代入すると

$$\bar y(x,\ s)=-\frac{w_0\bar F(s)}{2\beta^3EI}\int_0^x\{\sinh\beta(x-\xi)$$
$$-\sin\beta(x-\xi)\}d\xi+\frac{1}{2\beta^2}\bar y''_x(0,s)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+\frac{1}{2\beta^3}\bar y'''_x(0,\ s)(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$

しかるに $\int_0^x\{\sinh\beta(x-\xi)-\sin\beta(x-\xi)\}d\xi=$
$$-\frac{1}{\beta}(2-\cosh\beta x-\cos\beta x)$$

よって
$$\bar y(x,\ s)=\frac{w_0\bar F(s)}{2\beta^4EI}(2-\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+A(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+B(\sinh\beta x-\sin\beta x) \qquad (1\cdot9)$$

(ただし $A=\frac{1}{2\beta^2}\bar y''_x(0,s)$, $B=\frac{1}{2\beta^3}\bar y'''_x(0,s)$)

境界条件 $\bar y(l,\ s)=\bar y'_x(l,\ s)=0$ より A, B を決定すると次の補助方程式を得る．

$$\bar y(x,\ s)=\frac{w_0\bar F(s)}{2\beta^4EI}\cdot\frac{Q(\beta)}{1-\cosh\beta l\cos\beta l} \qquad (1\cdot10)$$

ただし
$$Q(\beta)=(2-\cosh\beta x-\cos\beta x)(1-\cosh\beta l\cos\beta l)$$
$$+(\sinh\beta l\sin\beta l-\cosh\beta l+\cos\beta l)(\cosh\beta x-\cos\beta x)$$
$$+(\sinh\beta l+\sin\beta l-\cosh\beta l\sin\beta l-\sinh\beta l\cos\beta l)$$
$$\cdot(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$

(ただし $\beta^4=-ms^2/EI$)

上式は両端固定梁が任意形式の時間関数 F(t) の等分布荷重をうける場合の横振動補助方程式を与える．

ここで $\bar F(s)=\mathcal{L}^{-1}\sin\omega t=\omega/s^2+\omega^2$ を (1・10) 式に代入

$$\bar y(x,\ s)=\frac{w_0}{2EI}\cdot\frac{\omega}{S^2+\omega^2}\cdot\frac{Q(\beta)}{\beta^4(1-\cosh\beta l\cos\beta l)} \qquad (1\cdot11)$$

ところで $\lim_{\beta\to0}\frac{Q(\beta)}{\beta^4(1-\cosh\beta l\cos\beta l)}=$定数$\neq0$

よって s=0 (β=0)は(1・11)式の極とはなり得ない．

極は $s^2+\omega^2=0$ より $s=\pm i\omega$ (1・12)

および $\cosh\beta l\cos\beta l=1$ より求まる．この特性方程式の根 β を γ_n で表わすと

$$\gamma_1l=4.730,\ \gamma_2l=7.853,\ \gamma_3l=10.996,\cdots\cdots$$

ところで

$$\beta^4=-\frac{ms^2}{EI}\ \text{よって}\ s=\pm\frac{h}{i}\beta^2=\mp ih\beta^2=\mp ih\gamma_n^2=\mp i\omega_n$$

(ただし $h^2=EI/m$, $\omega_n=h\gamma_n^2$, $\cosh\gamma_nl\cos\gamma_nl=1$)

よって極は，$S_n=\pm i\omega_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ (1・13)

ところで一般に関数 f(t) のラプラス変換 $\bar f(s)$ の逆変換は Fourier-Mellin 複素反転積分 (Bromwich 積分) になり，またそれは結果的には $e^{st}\bar f(s)$ の留数の級数展開となる．すなわち

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar y(x,\ s)ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{r\to\infty}e^{st}\bar y(x,\ s)ds$$
$$=\sum R=\mathrm{res}\{\bar y,\pm i\omega\}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{res}\{\bar y,\pm i\omega_n\} \qquad (1\cdot14)$$

(ただし R は $e^{st}\bar y(x,s)$ の留数，かつ $\lim_{r\to0}|\bar y(x,s)|=0$, $s=re^{i\theta}=\gamma+i\lambda$)

極はすべて単極であるから，これらの極に対する留数は

$$\mathrm{res}\{\bar y,\ \pm i\omega\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=\pm i\omega}$$
$$=\frac{w_0Q(\gamma_0)}{2EI\gamma_0^4(1-\cosh\gamma_0l\cos\gamma_0l)}\sin\omega t \qquad (1\cdot15)$$

(ただし $\bar y(x,\ s)=A(s)/B(s)$, $B(s)=s^2+\omega^2$, $\gamma_0^2=\omega/h$, $h^2=EI/m$)

$$\mathrm{res}\{\bar y,\ i\omega_n\}=\left[\frac{w_0}{2EI\beta^4}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{Q(\beta)}{B'(s)}\cdot e^{st}\right]_{s=i\omega_n}$$

(ただし $B(s)=1-\cosh\beta l\cos\beta l$)

$$=\frac{w_0\omega h}{EI\gamma_n^3}\cdot\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}\cdot\frac{Q(\gamma_n)\ e^{i\omega_nt}}{l(\sinh\gamma_nl\cos\gamma_nl-\cosh\gamma_nl\sin\gamma_nl)i}$$

($i\omega_n$ に対しては $d\beta/ds=i/2h\beta$)

$$\mathrm{res}\{\bar y,-i\omega_n\}=-\frac{w_0\omega h}{EI\gamma_n^3}\cdot\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$$
$$\cdot\frac{Q(\gamma_n)\ e^{-i\omega_nt}}{l(\sinh\gamma_nl\cos\gamma_nl-\cosh\gamma_nl\sin\gamma_nl)i}$$

$\therefore\ y(x,\ t)$

$$=\frac{w_0}{2EI\gamma_0^4}\cdot\frac{Q(\gamma_0)}{1-\cosh\gamma_0l\cos\gamma_0l}\ \sin\omega t$$
$$+\frac{2w_0\omega h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^3(\omega^2-\omega_n^2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{Q(\gamma_n)\ \sin\omega_n t}{\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l} \quad ——(1\cdot16)$$

（ただし $h^2=EI/m,\ \gamma_0{}^2=\omega/h,\ \gamma_n{}^2=\omega_n/h,$
$\cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=1,\ n=1,2,\cdots\cdots$）

第3報の例(1)に示した如く，第1項は $\sin\omega t$ に比例している故，周期は外力と等しく，所謂，梁の強制振動を示す定常状態における解である．第2項の級数は梁の自由振動を表わすが，実際には材料の分子間の内部摩擦等の抵抗のため時間と共に減衰することは式を検討すれば結論しうる．梁の固有振動数は $\omega_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ で梁は $\omega=\omega_n$ のとき共振を生じ第1項，第2項共，振巾が増大する．

(2)　両端支持梁が衝撃的集中モーメント $M_0u'(t)$ を受ける場合

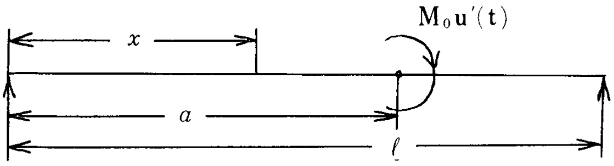


Fig. 2

（解）　Fig. 2 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=M_0u''(x-a)u'(t)$$
$$=M_0u''(x-a)F(t) \quad ——(2\cdot1)$$

初期条件　$y(x,\ 0)=\dot{y_t}(x,0)=0 \quad ——(2\cdot2)$

境界条件　$y(0,t)=\dot{y_x}(0,t)=0 \quad ——(2\cdot3)$

$y(l,\ t)=\dot{y_x}(l,\ t)=0 \quad ——(2\cdot4)$

それぞれラプラス変換すると

$$\bar{f}(x,\ s)=M_0u''(x-a)\bar{F}(s) \quad ——(2\cdot5)$$
$$\bar{y}(0,\ s)=\dot{\bar{y}}_x(0,\ s)=0 \quad ——(2\cdot6)$$
$$\bar{y}(l,\ s)=\dot{\bar{y}}_x(l,\ s)=0 \quad ——(2\cdot7)$$

また

$$\bar{\phi}(x,\ s)=\frac{M_0}{EI}u''(x-a)\bar{F}(s) \quad ——(2\cdot8)$$

前問と同様に第3報，(2・6) 式に代入すると

$$\bar{y}(x,\ s)=\frac{M_0\bar{F}(s)}{2\beta^3EI}\int_0^x u''(\xi-a)\{\sinh\beta(x-\xi)-\sin\beta(x-\xi)\}d\xi$$
$$+A(\sinh\beta x+\sin\beta x)+B(\sinh\beta x-\sin\beta x)$$

（ただし $A=\bar{y}'(0,s)/2\beta,B=\bar{y}_x'''(0,s)/2\beta^3$）

$$\int_0^x\delta^{(n)}(\xi-a)\psi(\xi)d\xi=(-1)^n\psi^{(n)}(a)\ \text{より}$$

（ただし $a\leqq x\leqq a+T$）

$$\bar{y}(x,\ s)=\frac{M_0\bar{F}(s)}{2\beta^2EI}\{\cosh\beta(x-a)-\cos\beta(x-a)\}u(x-a)$$
$$+A(\sinh\beta x+\sin\beta x)+B(\sinh\beta x-\sin\beta x) \quad —(2\cdot9)$$

境界条件 $\bar{y}(l,\ s)=\dot{\bar{y}}_x(l,\ s)=0$ よりA，B を決定し，$\bar{F}(s)=1$ を代入すれば

$$\bar{y}(x,\ s)=\frac{M_0}{2EI}\cdot\frac{Q(\beta)}{\beta^2\sinh\beta l\sin\beta l} \quad ——(2\cdot10)$$

ただし　$Q(\beta)=\{\cosh\beta(x-a)-\cos\beta(x-a)\}$
$\cdot\sinh\beta l\sin\beta l u(x-a)+\cos\beta(l-a)\sinh\beta l\sin\beta x$
$-\cosh\beta(l-a)\sin\beta l\sinh\beta x$

前問と同様に

$s=0\ (\beta=0)$ は (2・10) 式の極とはなり得ない．極は $\sinh\beta l\sin\beta l=0$ より $\beta=-in\pi/l,\ \beta=n\pi/l$ よって極は

$$s_n=\pm h\beta^2/i=\pm in^2\pi^2h/l^2=\pm i\omega_n \quad —(2\cdot11)$$

（ただし $h^2=EI/m,\ \omega_n=n^2\pi^2h/l^2,\ n=1,2,\cdots$）

よって極$\pm i\omega_n$ に対する留数を求め，それらの和の逆変換が $y(x,\ t)$ になる．　すなわち

$$y(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\to\infty}e^{st}\bar{y}(x,\ s)ds$$
$$=\sum R=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{res}\{\bar{y},\ \pm i\omega_n\} \quad ——(2\cdot12)$$

極はすべて単極であるから

$$\mathrm{res}\{\bar{y},i\omega_n\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}=\left[\frac{M_0Q(\beta)}{2EI\beta^2}\cdot\frac{e^{st}}{B'(s)}\right]_{s=i\omega_n}$$

（ただし $\bar{y}(x,\ s)=A(s)/B(s),\ B(s)=\sinh\beta l\sin\beta l$）

よって　$\mathrm{res}\left\{\bar{y},\ i\frac{n^2\pi^2h}{l^2}\right\}$

$$=-\frac{M_0h}{EIn\pi i}\cdot\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,e^{i\frac{n^2\pi^2h}{l^2}t}$$

$\mathrm{res}\left\{\bar{y},\ -i\frac{n^2\pi^2h}{l^2}\right\}$

$$=\frac{M_0h}{EIn\pi i}\cdot\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,e^{-i\frac{n^2\pi^2h}{l^2}t}$$

$$\therefore\ y(x,\ t)=-\frac{2M_0h}{EI\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{l}a}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n^2\pi^2h}{l^2}t \quad ——(2\cdot13)$$

（ただし　$h^2=EI/m,\ n=1,2,\cdots\cdots$）

(3)　片持梁が急速集中モーメント $M_0u(t)$ を受ける場合

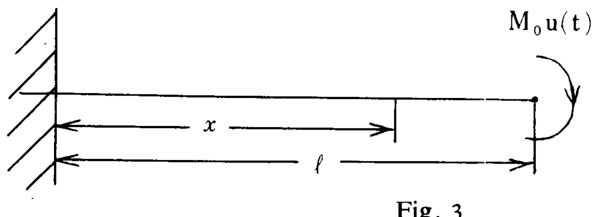


Fig. 3

（解）Fig. 3 より荷重関数は

$$f(x,\ t)=M_0u''(x-l)u(t)$$
$$=M_0u''(x-l)F(t)=0 \quad ——(3\cdot1)$$

$(\because\ x<l)$

初期条件は $y(x,0)=y_t'(x,0)=0$ ——(3・2)

境界条件は $y(0,t)=y_x'(0,t)=0$ ——(3・3)

$$y_x''(l,t)=-\frac{M_0}{EI}F(t) \quad ——(3\cdot4)$$

$$y_x'''(l,t)=0 \quad ——(3\cdot5)$$

(3・1), (3・3), (3・4), (3・5) 式をラプラス変換すると

$$\bar{f}(x,s)=0 \quad ——(3\cdot6)$$

$$\bar{y}(o,s)=\bar{y}_x'(0,s)=0 \quad ——(3\cdot7)$$

$$\bar{y}_x''(l,s)=-\frac{M_0}{EI}\bar{F}(s) \quad ——(3\cdot8)$$

$$\bar{y}_x'''(l,s)=0 \quad ——(3\cdot9)$$

これらより $\bar{\phi}(x,s)=\frac{m}{EI}\left[su_1(x)+v_1(x)\right]$

$$+\frac{\bar{f}(x,s)}{EI}=0 \quad ——(3\cdot10)$$

$$\therefore\ \bar{y}(x,s)=A(\cosh\beta x-\cos\beta x)+B(\sinh\beta x-\sin\beta x) \quad ——(3\cdot11)$$

(ただし $A=\bar{y}_x''(0,s)/2\beta^2, B=\bar{y}_x'''(0,s)/2\beta^3$)

$\bar{y}_x''(l,s)=-\frac{M_0}{EI}\bar{F}(s)$, $\bar{y}_x'''(l,s)=0$ よりA, B を決定すると補助方程式は

$$\bar{y}(x,s)=-\frac{M_0\bar{F}(s)}{2EI\beta^2}\cdot\frac{(\cosh\beta l+\cos\beta l)(\cosh\beta x-\cos\beta x)}{1+\cosh\beta l\cos\beta l} \quad ——(3\cdot12)$$

$$(\beta^4=-ms^2/EI)$$

(3・12) 式は任意形式の時間関数 F(t) の集中モーメントを受ける場合の横振動補助方程式を与える.

ここで先ず $F(t)=u'(t)$ とおくと $\bar{F}(s)=1$。よって

$$\bar{y}(x,s)=-\frac{M_0}{2EI}\cdot\frac{(\cosh\beta l+\cos\beta l)(\cosh\beta x-\cos\beta x)}{\beta^2(1+\cosh\beta l\cos\beta l)} \quad ——(3\cdot13)$$

ところで

$$\lim_{\beta\to0}\frac{(\cosh\beta l+\cos\beta l)(\cosh\beta x-\cos\beta x)}{\beta^2(1+\cosh\beta l\cos\beta l)}=\text{定数}\neq0$$

よって $s=0\ (\beta=0)$ は (3・13) 式の極とはなり得ない.

極は $1+\cosh\beta l\cos\beta l=0$ より求まる. この特性方程式の根 β を γ_n で表わすと

$\gamma_1 l=1.875$, $\gamma_2 l=4.694$, $\gamma_3 l=7.855$, ……

ところで $s=\pm\frac{h}{i}\beta^2=\mp ih\beta^2=\mp ih\gamma_n^2=\mp i\omega_n$ とおくと極は $s_n=\pm i\omega_n$ ——(3・14)

(ただし $h^2=EI/m$, $\omega_n=h\gamma_n^2$, $\cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=-1$)

そこで $\pm i\omega_n$ に対する留数を求め, それらの総和の逆変換を求めると

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}\bar{y}(x,s)ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma\to\infty}e^{st}\bar{y}(x,s)ds$$

$$=\sum R=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{res}\{\bar{y},\ \pm i\omega_n\} \quad ——(3\cdot15)$$

極はすべて単極であるから, これらに対する留数は

$$\mathrm{res}\left\{\bar{y},\ i\omega_n\right\}=\left[\frac{A(s)}{B'(s)}e^{st}\right]_{s=i\omega_n}=\left[-\frac{M_0}{2EI}\cdot\frac{Q(\beta)}{\beta^2}\cdot\frac{e^{st}}{B'(s)}\right]_{s=i\omega_n}$$

$$=\frac{M_0h}{EIl}\cdot\frac{Q(\gamma_n)\,e^{i\omega_n t}}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)\cdot i}$$

$$(s=-h\beta^2/i=i\omega_n \text{ より } d\beta/ds=-i/2\beta h)$$

$$\mathrm{res}\{\bar{y},\ -i\omega_n\}=-\frac{Moh}{EIl}\cdot\frac{Q(\gamma_n)\,e^{-i\omega_n t}}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)\cdot i}$$

$$(s=h\beta^2/i=-i\omega_n \text{ より } d\beta/ds=i/2\beta h)$$

よって $f(x,t)=M_0u''(x-l)u'(t)=0$ が作用する場合は

$$y(x,t)=\frac{2M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)} \quad ——(3\cdot16)$$

(ただし $h^2=EI/m$, $\omega_n=h\gamma_n^2$, $\cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=-1$, $n=1,2,\cdots\cdots$)

よって $f(x,t)=M_0u''(x-l)u(t)$ が作用する場合の解は「線形系の応答において単位衝撃応答の積分はインディシャル応答である」ことを利用して次の如く求める.

すなわち

$$y(x,t)=\frac{2M_0h}{EIl}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n\tau d\tau}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$$

$$=-\frac{2M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n\omega_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$$

$$+\frac{2M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n\omega_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)} \quad ——(3.17)$$

(ただし $Q(\gamma_n)=(\cos h\gamma_n l+\cos\gamma_n l)(\cosh\gamma_n x-\cos\gamma_n x)$)

第2項は静撓わみを与える. すなわち

$$y(x,\infty)=\frac{2M_0h}{EIl}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n\omega_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)} \quad ——(3\cdot18)$$

3. むすび

以上のことより結論として得たことを列挙すると

1) 集中荷重, 分布荷重, 集中モーメントを問わず,

非定常状態を含めた完全解を求めることができて，勿論定常解をその中に含む．

2）第3報，第4報の問題を通して，結局，重極（double poles）は現われず，すべて単極（simple pole）に対する留数を求めることで解を得ることができた．

（注意：しかし $\lim_{\beta\to 0} \bar{y}(x, s)$ を調べる場合，誤って重極を導くということの無いように，十分注意を払う必要有り．）

3）分布荷重，集中モーメントが急速荷重の形で作用する場合においても，集中荷重に対する場合と同様な手法により，解を求めることができる．

更に言葉を加えると集中荷重，分布荷重，集中モメーメントが，夫々，梁に作用する場合，ラプラス変換を用いると，静撓みを求める場合と同様，静定，不静定の区別は無くなり，全く機械的に完全解を求め得る．

筆者の計算したその他のものを Table 1，2に示す．

謝　　辞

終りに本題に対して終始，熱心に研究を進め，多くの有益なる結果および示唆を示された44年度卒論研究生，赤谷正道君に対して深甚なる敬意と感謝の意を表します．

参 考 文 献

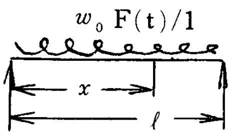
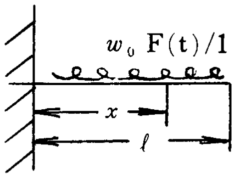
1）R. V. Churcill："応用ラプラス変換"，P. 251，彰国社，（1944）

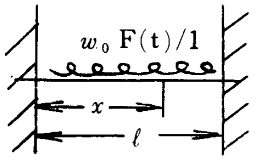
2）W. T. Thomson："Laplace Transformation"，P. 219，丸善，（1962）

3）亘理　厚："機械振動"，P. 167，丸善，（1966）

4）望月太喜雄："ラプラス変換の梁への応用"，第3報　宇部高専研究報告，11号，P 46，（1970）

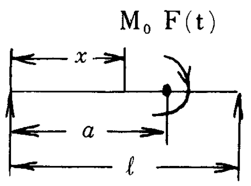
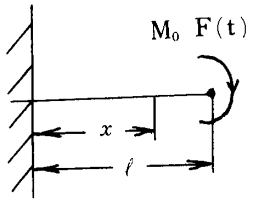
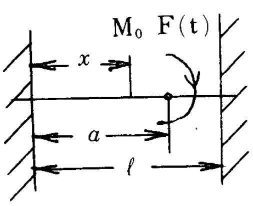
Table 1

beam	L.T.	loading function	deflection $y(x, t)$ (perfect solution containing a transient condition)
	a	$-w_0u(x)$ $\cdot \sin \omega t$ $= -w_0\sin\omega t$	$\dfrac{w_0Q(\gamma_0)}{2EI\gamma_0^4 \sin h\gamma_0 l \sin\gamma_0 l}\sin\omega t$ $-\dfrac{4w_0\omega l^6 h}{EI\pi^3}\sum_{n'=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n'\pi}{l}x}{n'^3(l^4\omega^2-n'^4\pi^4h^2)}\sin\dfrac{n'^2\pi^2h}{l^2}t$ $(\gamma_0{}^2=\omega/h,\ h^2=EI/m,\ n'=1, 3, 5, \cdots\cdots)$
	b	$-w_0u(x)$ $\cdot u'(t)$ $=-w_0u'(t)$	$-\dfrac{4w_0l^2h}{EI\pi^3}\sum_{n'=1}^{\infty}\dfrac{1}{n'^3}\sin\dfrac{n'\pi}{l}x\ \sin\dfrac{n'^2\pi^2h}{l^2}t$ $(h^2=EI/m,\ n'=1, 3, 5, \cdots\cdots\cdots)$
	c	$-w_0u(x)$ $\cdot u(t)$ $=-w_0$	$\dfrac{4w_0l^4}{EI\pi^5}\sum_{n'=1}^{\infty}\dfrac{1}{n'^5}\sin\dfrac{n'\pi}{l}x\ \cos\dfrac{n'^2\pi^2h}{l^2}t$ $-\dfrac{4w_0l^4}{EI\pi^5}\sum_{n'=1}^{\infty}\dfrac{1}{n'^5}\sin\dfrac{n'\pi}{l}x$ (　〃　)
	a	$-w_0u(x)$ $\cdot \sin \omega t$	$\dfrac{w_0}{2EI}\cdot\dfrac{Q(\gamma_0)\sin\omega t}{\gamma_0{}^4(1+\cosh\gamma_0 l\cos\gamma_0 l)}$ $-\dfrac{2w_0\omega h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n{}^3(\omega^2-\omega_n{}^2)(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ $(\gamma_0{}^2=\omega/h,\ h^2=EI/m,\ \omega_n=h\gamma_n{}^2,\ \cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=-1$ $n=1, 2\cdots\cdots\cdots)$
	b	$-w_0u(x)u'(t)$	$-\dfrac{2w_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n{}^3(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ (　〃　)
	c	$-w_0u(x)u(t)$	$\dfrac{2w_0}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n{}^5(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ $-\dfrac{2w_0}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n{}^5(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ (　〃　)

	b	$-w_0u(x)u'(t)$	$-\frac{2w_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n^3(\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l-\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l)}$ $(h^2=EI/m,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=1,\ n=1,2,\cdots\cdots)$
	c	$-w_0u(x)u(t)$	$\frac{2w_0}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n^5(\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l-\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l)}$ $-\frac{2w_0}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n^5(\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l-\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l)}$ (〃)

a : a piriodic load　b : an impulsive load　c : a rapid load

Table 2

beam	L.T.	loading function	deflection $y\ (x,\ t)$ (perfect solution containing a transient condition)
	a	$M_0u''(x-a)\cdot\sin\omega t$	$\frac{M_0Q(\gamma_0)}{2EI\gamma_0^2\sin h\gamma_0\ \sin\gamma_0 l}\sin\omega t$ $+\frac{2M_0\omega l^4h}{EI\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{l}a\ \sin\frac{n\pi}{l}x}{n(n^4\pi^4h^2-\omega^2l^4)}\sin\frac{n^2\pi^2h}{l^2}t$ $(h^2=EI/m,\ \gamma_0^2=\omega/h,\ n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$
	c	$M_0u''(x-a)\cdot u(t)$	$\frac{2M_0l^2}{EI\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{l}a}{n^3}\sin\frac{n\pi}{l}x\ \cos\frac{n^2\pi^2h}{l^2}t$ $-\frac{2M_0l^2}{EI\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{l}a}{n^3}\sin\frac{n\pi}{l}x$ (〃)
	a	$M_0u''(x-l)\cdot\sin\omega t=0$	$-\frac{M_0}{2EI}\cdot\frac{Q(\gamma_0)\sin\omega t}{\gamma_0^2(1+\cosh\gamma_0 l\cos\gamma_0 l)}$ $+\frac{2M_0\omega h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n(\omega^2-\omega_n^2)}\cdot\frac{\sin\omega_n t}{\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l}$ $(h^2=EI/m,\ \gamma_0^2=\omega/h,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=-1$ $n=1,2,\cdots\cdots)$
	b	$M_0u''(x-l)\cdot u'(t)=0$	$\frac{2M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ (〃)
	a	$M_0u''(x-a)\cdot\sin\omega t$	$\frac{M_0Q(\gamma_0)\sin\omega t}{4EI\gamma_0^2(1-\cosh\gamma_0 l\cos\gamma_0 l)}$ $+\frac{M_0\omega h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n(\omega^2-\omega_n^2)(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ $(h^2=EI/m,\ \gamma_0^2=\omega/h,\ \omega_n=h\gamma_n^2,\ \cosh\gamma_n l\cos\gamma_n l=1,$ $n=1,2,\cdots\cdots)$
	b	$M_0u''(x-a)\cdot u'(t)$	$\frac{M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\sin\omega_n t}{\gamma_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ (〃)
	c	$M_0u''(x-a)\cdot u(t)$	$-\frac{M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)\cos\omega_n t}{\gamma_n\omega_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ $+\frac{M_0h}{EIl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(\gamma_n)}{\gamma_n\omega_n(\sinh\gamma_n l\cos\gamma_n l-\cosh\gamma_n l\sin\gamma_n l)}$ (〃)

(昭和45年9月2日受理)