最適速度モデルの数理的拡張†

玉城龍洋*, 朝川恭子‡, 宮川葉子§, 吉川周二*

Mathematical generalization of the optimal velocity model

Tatsuhiro Tamaki, Kyoko Asakawa, Yoko Miyagawa, Shuji Yoshikawa

Abstract: We study the one-dimensional car following model with optimal velocity (OV model) which was proposed in [5]. The model consists of simple ordinally differential equations, but provides the essential property for queue dynamics arising in traffic jams. In this article, we propose the generalized version of OV model and give numerical results and some comments for our model.

1　はじめに

日本の自動車保有台数は一貫して増加し続け，平成 20 年の現在では 7 千 9 百万台を超えるに至る．日本の道路交通容量に大きな変化が無いため，その影響は交通渋滞として大きな社会問題のひとつとなっており，排気ガスなどによる環境汚染だけでなく，輸送コストおよび輸送時間の増大による年間 12 兆円に及ぶ経済損失をもたらしている [1].

これらの問題を解決するために近年様々な交通流解析モデルが提案され，その物理的側面の解析が進んでいる．交通問題の研究は 1950 年代から始まり，1990 年代のコンピュータの進展に伴い，近年，車両一台一台を考慮するミクロモデルが開発されている [2, 3, 4]．このミクロモデルにも多数のモデルが提案されているが，その中で特に注目されるモデルのひとつに最適速度モデルがあり，交通流の遷移やメタ安定分岐の解析に大きな成果を挙げている [5, 6].

本研究では既存の最適速度モデルが基本の加速度方程式の 1 次マクローリン展開であると仮定し，その 2 次の項まで含めた拡張最適速度モデルを提案する．そして，提案モデルの数値解析を行うことで拡張された項の物理的側面を考察する．

2　OV モデル

杉山 [5] は，交通流に関して，渋滞の構造を表す最適速度モデル (Optimal Velocity(OV) Model) を提案している．また杉山は，位相図を調査することで遅延を誘発する時間の境界を調査している．杉山の提案するモデルは 1 次元車両追従モデル (one-dimensional car-following model) であり，モデル中で車両は次式に従って動く．

$$\ddot{x}_n = a\{V(\Delta x_n) - \dot{x}_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

ここで，n は車両の番号，x_n は n 台目の車両の位置，$\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$ は車間距離，$\ddot{x}_n$ は x_n における加速度, $\dot{x}_n$ は x_n における速度, a は感応度と呼ばれ, 速度差に対してどれくらい鋭敏に応答できるかを表す正定数である．

$V(\Delta x_n)$ は OV 関数と呼ばれ，車間距離に基づいて安全速度を決定する．杉山の用いる OV 関数は次式で与えられる．

$$V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2 \tag{2}$$

OV 関数 (2) は Δx_n が小さい程 $V(\Delta x)$ は小さくなり，$\Delta x_n = \infty$ で最大値を取っていることがわかる．

OV モデルに従い，交通流のシミュレーションを行うと次の結果が得られる．図 1 は車間距離 (headway) と速度 (velocity) の位相空間における車の軌道を表している．ここでは，パラメータを次のように設定した; $a = 1.0$，$N = 10$(車の台数)，$L = 20$(レーンの長さ)．図において，上の頂点は車間距離および速度が大きく，スムーズな走行が可能である自由クラスタ，一方，下の頂点は渋滞クラスタである．車両が渋滞クラスタから自由クラスタへ，また自由クラスタから渋滞クラスタへの閉曲線に沿って動いていることがわかる．また，渋滞クラスタから自由クラスタへ移行する際，車両は緩やかに加速し，自由クラスタから渋滞クラスタへ移行する際には，車両は緩やかに減速していることがわかる．

3　OV モデルの拡張

方程式 (1) は, 前にいる車と自車の車間距離から定まる最適速度と自車の現在の速度の差に加速度が比例するということを表している．定数 a が正であることに注意する．もし最適速度より現在速度が速ければ, 加速度は負になる, すな

---

†(2008 年 11 月 28 日受理)
*宇部工業高等専門学校 経営情報学科
‡テックファーム株式会社
§あさひ製菓株式会社

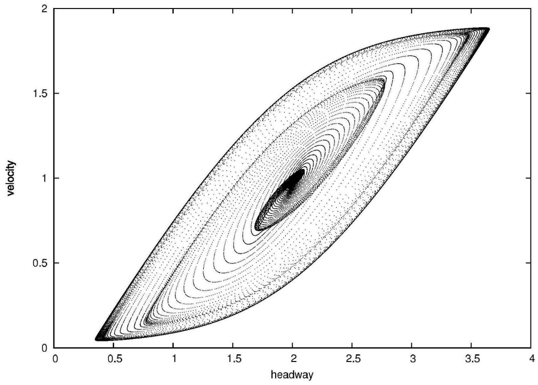

図 1: 車間距離と速度の関係

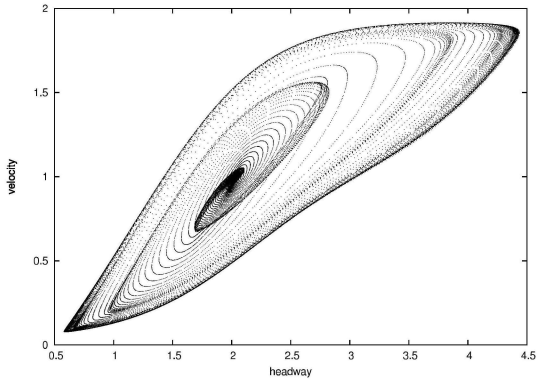

図 2: 拡張モデルの車間距離と速度の関係 ($a_2 = 0.95$)

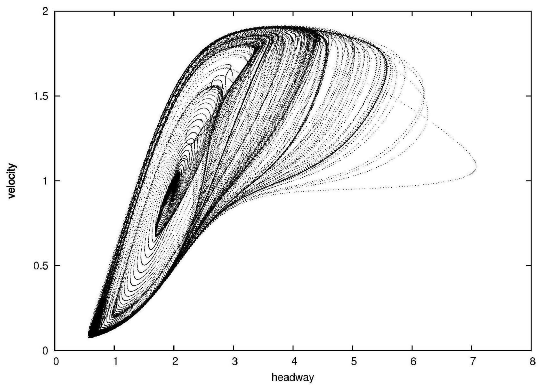

図 3: 拡張モデルの車間距離と速度の関係 ($a_2 = 0.98$)

わち減速することになる. 一方, 最適速度より現在速度が遅ければ, 加速度は正になるため, 加速をすることになる.

比例関係によってモデルは非常に簡潔に書けているが, より一般には, $F(0) = 0$ かつ $F' > 0$ なる関数 F に対して

$$\ddot{x}_n = F(V(\Delta) - \dot{x}_n)$$

なるモデルが考えられる. 方程式 (1) はこの F のマクローリン展開の一次の項に対応すると考えられる, すなわち, $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= F'(0) \cdot x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

が成り立つので, $a = F'(0)$ として, 高次の項を無視した方程式が (1) といえる. 高次の項まで取り入れることで, より正確な現象を把握することが出来ると期待される.

本論文では特に 2 次の項 $F''(0)x^2/2$ まで含めた方程式:

$$\ddot{x}_n = a_1\{V(\Delta) - \dot{x}_n\} + a_2\{V(\Delta) - \dot{x}_n\}^2 \tag{3}$$

を提案し, 2 次の項が与える影響を数値解析する.

4 数値解析

式 (3) に対して a_2 を変化させながら，車間距離 (headway) と速度 (velocity) の変化を解析する．なお，a_2 以外のパラメータは次の通りである．$a_1 = 1.0$，$N = 10$(車の台数)，$L = 20$(レーンの長さ)．$a_2 = 0.95$ および $a_2 = 0.98$ の場合の結果を図 2，図 3 に示す.

まず，図 2 より，headway=2.5 までの渋滞クラスタから自由クラスタへの移行に注目すると，一次元車両追従モデルに比べて加速が急激である．一方，自由クラスタから渋滞クラスタへの移行時には，車間距離が大きい場合には減速は緩やかだが，車間距離が小さくなるにつれ，急激な減速が生じている.

また図 3 からは，渋滞クラスタから自由クラスタへ移行する軌道が乱れていることが観察される．そこでこの軌道を詳細に解析する.

図 4 に示すように，ステップ数を増加させて定常状態にすると，車間距離と速度の関係は一定のステップ以上で安定した軌道となり，安定状態には 4 つの軌道が存在していることがわかる．また，奇数台目と偶数台目の各車両の軌道を図 5 と図 6 に示す．図 4 は二つの図の合成であり，車両の配置で異なる挙動を取ることがわかる.

二つの図を比較すると，渋滞クラスタを示す左下の頂点がほぼ一致するのに対して，自由クラスタを示す右上の部分が大きく異なることがわかる．奇数台目の車両では車間距離 3.5 付近で最大速度約 1.8 を取るのに対して，偶数台目の車両では車間距離 5.5 付近で最大速度となっており，さらにその頂点が不明確になっている.

次に，密度と交通量の関係について，杉山のモデルと提案する拡張モデルの比較を図 7 に示す．図中の + が杉山の提案するモデル，∘ が拡張モデルである．密度が 0 から 0.4 が自由流を表し，0.4 から 0.7 までが自由走行と渋滞が混合した交通流を表す．また，0.7 以降は安定的に渋滞が存在する渋滞流を表している [5]．図より，自由流と渋滞流では 2 つのモデルが完全に一致しているのに対し，中間の混合した交通流においては，拡張モデルの交通量が減少している

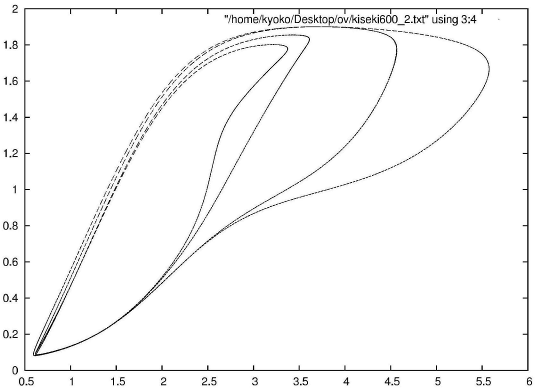

図 4: 拡張モデルの安定状態

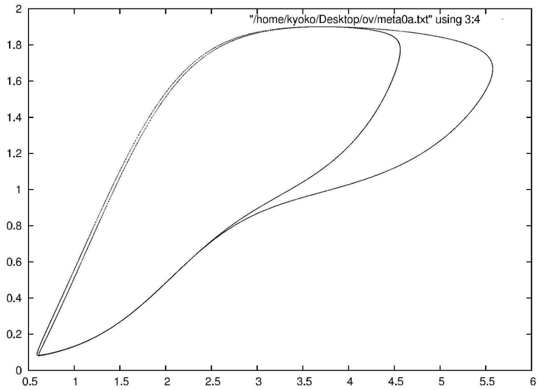

図 6: 偶数台目の軌道

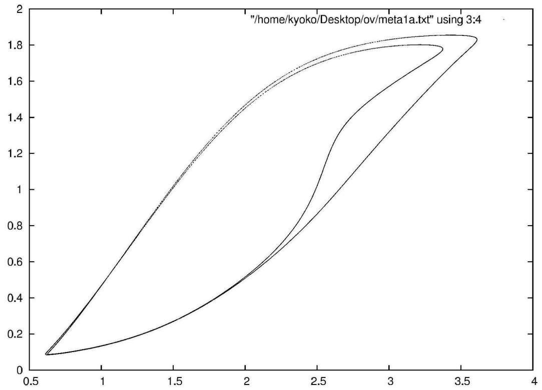

図 5: 奇数台目の軌道

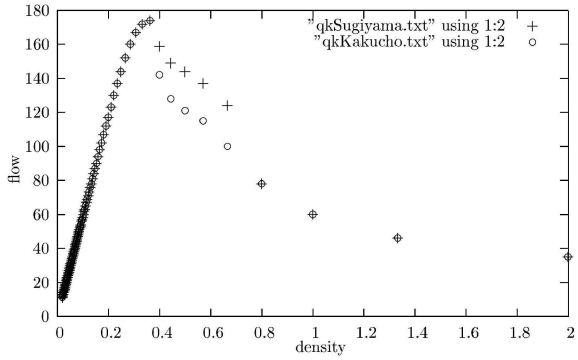

図 7: 杉山モデルおよび拡張モデルの Q-k 図

ことがわかる．これは図 6 から分かるように，偶数台目の車両は自由流においても大きな車間距離をとり，さらに明確な頂点を持たない．そのため混合状態の交通流に不安定さをもたらし，渋滞を発生させることが原因と考えられる．

5 おわりに

本研究では，杉山の提案する最適速度モデルを追試するとともにその拡張モデルを提案した．提案する拡張モデルは杉山らの提案する最適速度関数が基礎となる関数のマクローリン展開の 1 次項であると仮定し，マクローリン展開の 2 次の項を導入した．その結果，杉山らのモデルが時間の経過によって，車間距離と速度の関係が安定し閉軌道に乗るのに対して，拡張したモデルでは 4 つの軌道を持つメタ安定状態となることがわかった．また，提案モデルの定常状態の軌道は奇数台目の車両と偶数台目の車両で異なり，車両の配置によって，それぞれ 2 つの状態を持つことを示した．さらに，2 つのモデルの密度と交通量の関係図を比較した結果，自由走行と渋滞が混合した交通流において拡張モデルの交通量が減少することを示し，拡張した 2 次の項がメタ安定分岐の不安定さを拡大させることを示した．

参考文献

[1] (財) 自動車検査登録情報協会, http://www.airia.or.jp/number/index.html

[2] K. Nagel,Steen Rasmussen: Traffic at the edge of chaos, Artificial Life IV, pp.222-235, (1994)

[3] 玉城龍洋, 安江里佳, 北栄輔: セル・オートマトンによる自動車専用道路の交通シミュレーション, 情報処理学会・数理モデル化と問題解決,Vol.46, No.SIG10, pp.30-40, (2005)

[4] K. Nagel and M. Schreckenberg: Cellular automaton model for freeway traffic, Journal of Physics I france, Vol.2, pp.2221-2229 (1992)

[5] Yuki Sugiyama: Optimal velocity model for traffic flow, Computer Physics Communications, pp.399-401, (1999)

[6] M. Bando, and K. Hasebe, et al: Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, Physical REVIEW E, Vol. 51, No. 2, pp.1035-1042, (1995)