原資産価格過程に依存する取引費用を伴うヘッジ戦略の局所リスク最小化

吉川周二*, 吉川大介†

Local risk-minimization under transaction costs depending on the underlying asset price

Shuji Yoshikawa, Daisuke Yoshikawa

Abstract: We study the approach to the pricing and hedging of contingent claims under transaction costs in incomlete market. In incomplete market, we cannot replicate contingent claims. That is why various hedge method is suggested, for exemple, mean-variance hedge, local risk-minimization, and so on. In [2], Lamberton, Pham and Schweizer gave the new approach for local risk-minimization under transaction costs. In their case, bid-ask spread ratio does not change with respect to the time evolution, namely the cost parameter λ is constant. We extend their case to the case that the cost parameter λ depends on the stochastic process of underlying asset price.

1 序

取引コストを伴う市場分析についての研究はさまざまな観点から行われている．ここでは，Lamberton-Pham-Schweizer([2]) による定式化を概観し，より自然な設定の下での局所リスク最小化問題について考察する．

原資産の価格過程を $S=\{S_t;t\in[0,T]\}$ とし，フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P)$ で定義されるものとする．ここで，$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ である．また，ニュメレールの価格過程を $B=\{B_t;t\in[0,T]\}$ とする．これらに対して，原資産の割引価格過程を $X=\{X_t=\frac{S_t}{B_t};t\in[0,T]\}$ で定義する．

割引価格過程 X に対するマルチンゲール測度 Q とは，

$$E^Q[X_\tau|\mathcal{F}_t]=X_t,\quad \tau>t$$

を満たすような確率測度のことである．$E^Q[\cdot]$ は，確率測度 Q のもとでの期待値を表す．そして，このようなマルチンゲール測度が存在する市場では無裁定条件が成立する．

また，確率過程 Y に対して $\Theta(Y)$ を $\theta_k\Delta Y_k\in\mathcal{L}^2(P),k=1,\ldots,T$ となるような可予測過程 $\theta:=\{\theta_k,k=1,\ldots,T+1\}$ の集合とする．ここで，$\Delta Y_k:=Y_k-Y_{k-1}$ と定義する．取引戦略 $\phi:=(\theta,\eta)$ は $\theta\in\Theta(X)$ と，適合過程 $\eta:=\{\eta_k,\ k=0,\ldots T\}$ からなる組み合わせとし，

$$V_k(\phi):=\theta_{k+1}X_k+\eta_k\in\mathcal{L}^2(P) \tag{1.1}$$

と定義される適合過程 $V(\phi)$ を ϕ の価値過程と呼ぶ．この $V(\phi)$ は原資産 X をベースとするポートフォリオ価値を指すものと考えられる．本稿で，取引費用と言うのは，ビッドアスクスプレッドを指すものとする．より厳密には，コストパラメータ $\lambda\in[0,1)$ に対して，$(1-\lambda)X_k$，$(1+\lambda)X_k$ をそれぞれ原資産 X の時点 k におけるビッド価格，アスク価格とする．ところで，[2] では，ビッドアスクスプレッドに関して確定的なモデル (即ち，λ が定数の場合) を考えているが，実際の市場ではこれは確率過程 X_k に依存して確率的に変動すると考えられる．すなわち，時点 k におけるビッドアスクスプレッドを λ_k とすると，

$$\lambda_k=\lambda(X_k)$$

(2006 年 11 月 24 日受理)
*宇部工業高等専門学校 経営情報学科
†みずほ第一フィナンシャルテクノロジー

とすべきであり, この確率過程のもとでの局所リスク最小化問題を考察するのが本論文の目的である．

最初に一回の取引に要するコストを表現するためのコストパラメータ $\lambda(X_k) \in [0,1)$ を定義する．そして，証券一単位あたりの bid 価格と ask 価格をそれぞれ $(1-\lambda(X_k))X_k$，$(1+\lambda(X_k))X_k$ で定義する $(k=1,\dots,T)$．すると，一度の取引で要する出費は,

$$\begin{aligned}&\eta_k - \eta_{k-1} + (\theta_k - \theta_{k-1})X_k + \lambda(X_k)X_k(\theta_k - \theta_{k-1})\,\mathrm{sign}(\theta_k - \theta_{k-1})\\&= V_k(\phi) - V_{k-1}(\phi) - \theta_k(X_k - X_{k-1}) + \lambda(X_k)X_k|\theta_k - \theta_{k-1}|\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$\mathrm{sign}(\theta_k - \theta_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \theta_k - \theta_{k-1} > 0 \\ 0 & \theta_k - \theta_{k-1} = 0 \\ -1 & \theta_k - \theta_{k-1} < 0 \end{cases}$$

は原資産の売りか買いかによって決まる．従って，累積コスト C_k は

$$C_k = V_k(\phi) - \sum_{j=1}^{k}\theta_j \Delta X_j + \sum_{j=1}^{k}\lambda(X_j)X_j|\Delta\theta_j|$$

で定義される．

この定式化のもとで局所リスク最小化解の存在と解の構造が与えられる[1]．また，条件付き請求権を以下のように定義する．

定義 1.1. 条件付き請求権は $\mathcal{F}_T$ 可測な確率変数の組み合わせ $(\bar\theta_{T+1}, \bar\eta_T)$ で，以下を満たすものとする．

$$\bar\theta_{T+1}X_T \in \mathcal{L}^2(P), \tag{1.2}$$

$$H := \bar\theta_{T+1}X_T + \bar\eta_T \in \mathcal{L}^2(P). \tag{1.3}$$

この定義は通常の条件付き請求権の定義に比べて複雑ではあるが，本質的には通常の定義と同様である．例えば，ヨーロピアンコールオプションをこの条件付き請求権で表現するには,

$$\bar\theta_{T+1} := 0, \qquad \bar\eta_T := ((1+\lambda(X_T))X_T - K)^+$$

と定義すればよい．ここで，K は行使価格である．この条件付き請求権に対して，複製ポートフォリオを構築することを考える．すなわち，価値過程 $V(\phi)$ に対して,

$$H = V_T(\phi)$$

を満たす ϕ を考える．もし，$K=0$ であれば，$k=0,\dots,T$ に対して,

$$\theta_{k+1} = (1+\lambda(X_k)), \qquad \eta_k = 0$$

とすればよい[2]．しかし，一般には $K \neq 0$ である．そのような場合，どのようにして最適なポートフォリオを考えればよいか．

その一つの基準として，取引コストも含めたポートフォリオ構築費用をできる限り小さくする，ということが考えられよう．具体的には複製ポートフォリオを構築することで満期までに累積コストが $C_T(\phi)$ までになるが，リバランス時点 k では，残余コスト $C_T(\phi) - C_k(\phi)$ を最小化することを考えるべきである．また，いかなる基準でこれを最小化するべきかについてもいくつかの選択肢があるが，よく用いられる手法は平均自乗の尺度で最小化することである．即ち,

$$\min_{\phi} \mathrm{Var}[C_T(\phi) - C_t(\phi)|\mathcal{F}_t].$$

このような考え方を局所リスク最小化問題という．そして，この問題の解となる取引戦略 ϕ を局所リスク最小化解という．

命題 1.2. 戦略 $\phi = (\theta, \eta)$ が局所リスク最小化解である必要十分条件は，以下を満たすことである．

(*i*) $C(\phi)$ がマルチンゲールである．

---

[1] ここでは，ビッドアスクスプレッドから生じる差額のみを取引費用と考えたが，もちろん取引毎に発生する定額費用を組み込む定式化も可能である [1]．ただし，その定式下における平均分散ヘッジ，局所リスク最小化問題に関して議論した研究は見当たらない．

[2] もちろん，他にも適当なポートフォリオを構築することで複製することはできる．

(ii) 任意の $k \in \{0, \ldots, T-1\}$ に対して，θ_{k+1} が

$$\mathrm{Var}\left[V_{k+1}(\phi) - \theta'_{k+1}\Delta X_{k+1} + \lambda(X_{k+1})X_{k+1}|\theta_{k+2} - \theta'_{k+1}| \mid \mathcal{F}_k\right]$$

を最小化すること．ここで，θ'_{k+1} は $\theta'_{k+1}\Delta X_{k+1} \in \mathcal{L}^2(P)$ かつ，$\theta'_{k+1}X_{k+1} \in \mathcal{L}^2(P)$ を満たす $\mathcal{F}_k$ 可測な確率変数である．

基本的には上の命題を用いて，ϕ を求めることができる．しかし，複雑な計算が要求される場合は，θ に明示的な解を与える次の定理を用いる．

定理 1.3. 値を $[-1, 1]$ にとる適合過程全体の空間を Γ で表す．過程 $\gamma \in \Gamma$ として，$k = 1, \ldots, T$ に対して，

$$X_k^\gamma := X_k(1 + \lambda(X_k)\gamma_k)$$

を定義する．また，ある戦略 $\phi = (\theta, \eta)$ に対して，V^γ を，

$$V_k^\gamma := \theta_k X_k^\gamma + \eta_k$$

で定義する．

すると，最適解の構造は以下のような $\delta \in \Gamma$ によって特徴付けられる．もし，$\nu \in \Gamma$ を $\nu_0 := 0$ かつ

$$\nu_j := \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \mathrm{sign}(\theta_k^* - \theta_{k-1}^*) + \delta_k^* I_{\theta_k}^*, & k = 1, \ldots, T \end{cases} \tag{1.4}$$

と定義すれば，この ν に対して最適解 θ^* は

$$\theta_k^* = \frac{\mathrm{Cov}(\Delta V_k^\nu(\phi^*), \Delta X_k^\nu | \mathcal{F}_{k-1})}{\mathrm{Var}[\Delta X_k^\nu | \mathcal{F}_{k-1}]} \tag{1.5}$$

となる．そして，そのような θ^* に対して，$\delta^* \in \Gamma$ が存在する．

注意. 命題 1.2 と定理 1.3 は [2, Proposition 2] と [2, Theorem 6] において，λ が X に依存する場合に一般化したものに対応する．定理 1.3 の結果が [2, Theorem 6] と同じものとなることは自然に推察される．なぜなら，局所リスク最小化問題は,

$$R_k(\phi) := E\left[(C_T(\phi) - C_k(\phi))^2 \,|\mathcal{F}_k\right], \qquad k = 0, 1, \cdots, T.$$

を解くことを意味するが，これは [2, Proposition 2] によると，

$$\mathrm{Var}\left[V_{k+1}(\phi) - \theta_{k+1}\Delta X_{k+1} + \lambda X_{k+1}|\theta_{k+2} - \theta_{k+1}| \mid \mathcal{F}_k\right]$$

を最小化する θ_{k+1} を見出すことに他ならない．上記の最適化問題は直感的には θ_{k+1} に関して最適化（微分してゼロと置く）だけなので，λ が確率的であることには依らない．故に，解は Theorem 1.3 と形式的に等しくなることが予想される．ただし, [2] をみるとわかる通り, 実際の証明は非常に込み入っているため、厳密な検証が必要である．次節以降でこの証明を与える．

2　証明の準備

補題 2.1 ([2, Lemma 1]). もし ϕ が局所リスク最小化であれば, $C(\phi)$ はマルチンゲールであり, 更に $k = 0, 1, \ldots, T-1$ に対して,

$$R_k(\phi) = E[R_{k+1}(\phi) \mid \mathcal{F}_k] + \mathrm{Var}[\Delta C_{k+1}(\phi) \mid \mathcal{F}_k] \qquad P\text{-}a.s. \tag{2.1}$$

が成り立つ．

Proof. 本稿の設定では, 費用過程, リスク過程ともに [2] と定義が異なるが, この補題の証明は戦略 ϕ の局所摂動 ϕ' の性質のみに依存するので, [2, Lemma 1] と全く同様に証明が出来る． □

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を定義する. また, U, Y, Z は $\mathcal{F}$-可測な確率変数で $U \in \mathcal{L}^2(P)$, $Z \in \mathcal{L}^2(P)$, $YZ \in \mathcal{L}^2(P)$ を満たすものとし, 次の条件付分散:

$$f(c,\omega) := \mathrm{Var}\,[U - cZ + \lambda(Z)Z|Y-c| \mid \mathcal{G}]\,(\omega)$$

を考察する.

以下の補題 2.2, 2.3 は, [2] の Lemma A2, A3 に対応する. [2] においては, λ が定数であるが, 確率変数 Z に依存しても $\lambda \in [0,1)$ の有界性より, 優収束定理は成り立つ為, ([2] の Appendix の全ての補題は) 全く同様に証明できる.

補題 2.2 ([2, Proposition A2]). $\mathrm{Var}[Z \mid \mathcal{G}] > 0$ を仮定する. この時, ほとんど全ての ω に対して,

$$f(c^*(\omega), \omega) \leq f(c,\omega) \qquad \textit{for all } c \in \mathbb{R}$$

を満たす $\mathcal{G}$-可測な確率変数 c^* が存在する.

次に $\mathbb{R} \times [0,1] \times \Omega$ 上の関数 g を,

$$g(c,\alpha,\omega) = \mathrm{Cov}\,(U + \lambda(Z)YZS^{\alpha,c}, Z(1+\lambda(Z)S^{\alpha,c}) \mid \mathcal{G})\,(\omega) - c\,\mathrm{Var}\,[Z(1+\lambda(Z)S^{\alpha,c}) \mid \mathcal{G}]\,(\omega)$$

で定義する. ただし,

$$S^{\alpha,c} := \alpha\overline{\mathrm{sign}}(Y-c) + (1-\alpha)\underline{\mathrm{sign}}(Y-c).$$

ただし $\overline{\mathrm{sign}}$ と $\underline{\mathrm{sign}}$ は

$$\overline{\mathrm{sign}}(x) := \mathrm{sign}(x) + I_{\{x=0\}} := \begin{cases} +1 & \text{for } x \geq 0 \\ -1 & \text{for } x < 0, \end{cases}$$

$$\underline{\mathrm{sign}}(x) := \mathrm{sign}(x) - I_{\{x=0\}} := \begin{cases} +1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x \leq 0, \end{cases}$$

と定義する.

補題 2.3 ([2, Proposition A3]). $\mathrm{Var}[Z \mid \mathcal{G}] > 0$ を仮定し, c^* は補題 *2.2* で与えられたものとする. この時,

$$g(c^*(\omega), \alpha^*(\omega), \omega) = 0 \qquad \textit{for } P\textit{-almost every } \omega$$

を満たす $\mathcal{G}$-可測な確率変数 $\alpha^* \in [0,1]$ が存在する.

次にいくつかの確率過程の可積分性を保証するために, 重要な補助確率過程 X^γ を定義する.

定義 2.4. 値を $[-1,1]$ にとる適合過程全体の空間を Γ で表す. この $\gamma \in \Gamma$ に対して, 過程 X^γ を

$$X_k^\gamma := X_k(1 + \lambda(X_k)\gamma_k)$$

で定義する. 戦略 $\phi = (\theta, \eta)$ に対して, 過程 $V^\gamma(\phi)$ を

$$V_k^\gamma(\phi) := \theta_{k+1}X_k^\gamma + \eta_k \tag{2.2}$$

で定義する.

過程 $\lambda(X_k) \in [0,1)$ なので, X^γ もまた非負であり, 二乗可積分であり, 適合過程になることに注意する.

定義 2.5 (実質的リスク, 平均分散トレードオフ). (i) 過程 X が実質的リスクであるとは, $k = 1, \ldots, T$ に対して,

$$\frac{X_{k-1}^2}{E[\Delta X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]} \leq C \qquad P\text{-}.a.s. \tag{2.3}$$

を満たす C が存在することをいう. また (2.2) を満たす最小定数 C を C_{SR} で表す.
(ii) $\gamma \in \Gamma$ に対して, X^γ の平均分散トレードオフ過程とは

$$\hat{K}_l^\gamma := \sum_{j=1}^{l} \frac{(E[\Delta X_j^\gamma \mid \mathcal{F}_{j-1}])^2}{\mathrm{Var}[\Delta X_j^\gamma \mid \mathcal{F}_{l-1}]}$$

のことをいう．もし $\hat{K}_l^\gamma$ が P-$a.s.$ に有界であれば，全ての $l=1,\dots,T$ に対して

$$\Delta\hat{K}_l^\gamma=\frac{(E[\Delta X_l^\gamma\mid\mathcal{F}_{l-1}])^2}{\mathrm{Var}[\Delta X_l^\gamma\mid\mathcal{F}_{l-1}]}\le C\qquad P\text{-}a.s. \tag{2.4}$$

を満たす最小定数を $C_{MVT}(\gamma)$ で表す．

補題 2.6. X が実質的リスクであると仮定する．この時，次が成り立つ．

(*i*) 全ての $\gamma\in\Gamma$ に対して $\Theta(X^\gamma)\supseteq\Theta(X)$.

(*ii*) $k=0,1,\dots,T$ と全ての $\gamma\in\Gamma$ と任意の戦略 ϕ に対して $V_k^\gamma(\phi)\in\mathcal{L}^2(P)$.

(*iii*) $k=0,1,\dots,T$ と任意の $\theta\in\Theta(X)$ に対して，$\theta_{k+1}X_k\in\mathcal{L}^2(P)$.

(*iv*) $k=0,1,\dots,T$ と任意の戦略 ϕ に対して，$C_k(\phi)\in\mathcal{L}^2(P)$.

Proof. X^γ の定義から，

$$\Delta X_k^\gamma=\Delta X_k+\gamma_k\Delta(X_k\lambda(X_k))+X_{k-1}\lambda(X_{k-1})\Delta\gamma_k. \tag{2.5}$$

を満たし，γ の有界性より (*i*) は (*iii*) より従う．$V^\gamma(\phi)$ の定義より，

$$V_k^\gamma(\phi)=V_k(\phi)+\lambda(X_k)\gamma_k\theta_{k+1}X_k$$

であり，(1.1) を用いると (*iii*) から (*ii*) は従う． コスト過程 $C(\phi)$ の定義より，$k=0,1,\dots,T$ に対して過程 γ を $\gamma_k:=\mathrm{sign}(\Delta\theta_{k+1})$ と定義すると，

$$\begin{aligned}\Delta C_k(\phi)&=\Delta V_k(\phi)-\theta_k\Delta X_k+\lambda(X_k)X_k|\Delta\theta_{k+1}|\\&=\theta_{k+1}X_k(1+\lambda(X_k)\gamma_k)+\eta_k-\theta_kX_k(1+\lambda(X_k)\gamma_k)-\eta_k\\&=\theta_{k+1}X_k^\gamma+\eta_k-\theta_kX_k^\gamma-\eta_{k-1}\\&=\Delta V_k^\gamma(\phi)-\theta_k\Delta X_k^\gamma.\end{aligned} \tag{2.6}$$

過程 θ は可予測であり，$\gamma\in\Gamma$ であるので，(2.6) と (1.1) より，(*iv*) は (*i*) と (*ii*) より従う．よって，あとは (*iii*) を示せばよいが，これは [2, Lemma 3] と同様に，以下のことからわかる．$\theta\in\Theta(X)$ であり X が実質的リスクであるから，

$$E[(\theta_{k+1}X_k)^2]=E\left[(\theta_{k+1}\Delta X_{k+1})^2\frac{X_k^2}{E[\Delta X_{k+1}^2\mid\mathcal{F}_k]}\right]\le C_{SR}E[(\theta_{k+1}\Delta X_{k+1})^2]<\infty.$$

□

命題 2.7. X が有界な平均分散トレードオフでありかつ実質的リスクであるとする．適合過程 $\gamma\in\Gamma$ を固定し，任意の $k=1,\dots,T$ に対して，

$$\mathrm{Var}[\Delta X_k^\gamma\mid\mathcal{F}_{k-1}]\ge c\,\mathrm{Var}[\Delta X_k\mid\mathcal{F}_{k-1}]\qquad P\text{-}a.s. \tag{2.7}$$

を満たすような $c>0$ が存在するとする．この時，X^γ は有界平均分散トレードオフであり，$\Theta(X^\gamma)=\Theta(X)$.

Proof. まず，(2.7) ならば X^γ が有界平均分散トレードオフであることを示す．(2.4) より，任意の $k=1,\dots,T$ に対して，

$$(E[\Delta X_k^\gamma\mid\mathcal{F}_{k-1}])^2\le C\,\mathrm{Var}[\Delta X_k\mid\mathcal{F}_{k-1}]\qquad P\!-\!a.s.$$

が示せばこれは十分である．

ここで，

$$|\Delta(\lambda(X_k)X_k)|=|\lambda(X_k)X_k-\lambda(X_k)X_{k-1}+\lambda(X_k)X_{k-1}-\lambda(X_{k-1})X_{k-1}|\le|\Delta X_k|+2|X_{k-1}|$$

なので，(2.5) より，

$$\begin{aligned}(\Delta X_k^\gamma)^2&\le 2(\Delta X_k)^2+2(\gamma_k\Delta(\lambda(X_k)X_k))^2+2(X_{k-1}\lambda(X_{k-1})\Delta\gamma_k)^2\\&\le 2(\Delta X_k)^2+4(|\Delta X_k|^2+4|X_{k-1}|^2)+8X_{k-1}^2\\&\le 6(\Delta X_k)^2+24(X_{k-1})^2\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に, (2.3) と (2.4) より, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}E[(\Delta X_k^\gamma)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] &\le 6E[\Delta X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] + 24X_{k-1}^2 \\ &\le CE[\Delta X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &\le C(1+C_{MVT}(0))\operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}],\end{aligned}$$

補題 2.6 より, $\Theta(X) \subseteq \Theta(X^\gamma)$ なので, $\Theta(X^\gamma) \subseteq \Theta(X)$ を示せばよい. 過程 X^γ は適合過程なので, Doob 分解が存在して, その Doob 分解を $X^\gamma = X_0^\gamma + M^\gamma + A^\gamma$ とすると,

$$\theta_k \Delta X_k^\gamma = \theta_k \Delta M_k^\gamma + \theta_k \Delta A_k^\gamma = \theta_k E[\Delta X_k^\gamma \mid \mathcal{F}_{k-1}],$$

$$\operatorname{Var}[\Delta X_k^\gamma \mid \mathcal{F}_{k-1}] = E[(\Delta M_k^\gamma)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}].$$

過程 X^γ は有界平均分散トレードオフであるから, (2.4) より $\theta \in \Theta(X^\gamma)$ と, 任意の $k=1,\dots,T$ に対して $\theta_k \Delta M_k^\gamma \in \mathcal{L}^2(P)$ であることは同値である. 同様のことが, $X = X^0$ に対しても成り立つ. 簡単のため, 任意の $k=1,\dots,T$ に対して $\theta_k \Delta M_k^\gamma \in \mathcal{L}^2(P)$ を, $\theta \in L^2(M^\gamma)$ と書くことにする. もし θ が可予測であり (2.7) であれば,

$$E[(\theta_k \Delta M_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \theta_k^2 \operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] \le \frac{1}{c}\theta_k^2 \operatorname{Var}[\Delta X_k^\gamma \mid \mathcal{F}_{k-1}] = \frac{1}{c}E[(\theta_k \Delta M_k^\gamma)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}].$$

故に, $L^2(M^\gamma) \subseteq L^2(M)$ が成り立つ, すなわち, $\Theta(X^\gamma) \subseteq \Theta(X)$. □

命題 2.8. もし, 任意の $k=1,\dots,T$ に対して,

$$2\sqrt{\frac{E[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]}{\operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]}} \le \delta \qquad P\text{-}a.s. \tag{2.8}$$

が成り立てば, (2.7) も同様に全ての $\gamma \in \Gamma$ に対して $c = 1-\delta$ として成り立つ. 特に, もし X が有界平均分散トレードオフであり実質的リスクでありかつ

$$4 \max_{k=0,\dots,T} \lambda(X_k)^2 \left[1 + 2C_{MVT}(0) + 2C_{SR}(1+C_{MVT}(0))\right] < 1 \tag{2.9}$$

を満たすと, (2.8) は満たされる.

Proof. 条件付き分散から $\mathcal{F}_{k-1}$-可測な項を消去すると, Cauchy-Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[\Delta X_k^\gamma \mid \mathcal{F}_{k-1}] &= \operatorname{Var}[\Delta X_k + \lambda(X_k)\gamma_k X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &\ge \operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] - 2(\max_{k\in 0,\dots,T}\lambda(X_k))\sqrt{\operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]\operatorname{Var}[\gamma_k X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]}\end{aligned}$$

が導かれる. γ の有界性より, (2.8) を用いると,

$$\operatorname{Var}[\gamma_k X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] \le E[\gamma_k^2 X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \le \frac{\delta^2}{4\max_{k\in 0,\dots,T}\lambda(X_k)^2}\operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

がわかる. それゆえ, (2.7) が $c = 1-\delta$ に対して成り立つ.

(2.9) から (2.8) を導こう. (2.3) より成り立つ不等式:

$$X_{k-1}^2 \le C_{SR} E[\Delta X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]$$

及び (2.4) より成り立つ不等式:

$$E[\Delta X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \le \operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}](1 + C_{MVT}(0))$$

より,

$$\begin{aligned}E[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] &= \operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] + (X_{k-1} + E[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}])^2 \\ &\le \operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] + 2X_{k-1}^2 + 2E[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]^2 \\ &\le (1 + 2C_{MVT}(0) + 2C_{SR}(1+C_{MVT}(0)))\operatorname{Var}[\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}].\end{aligned}$$

□

3　主結果の証明

命題 *1.2* の証明．補題 2.1 より，もし ϕ が局所リスク最小化解なら $C(\phi)$ はマルチンゲールになる．もし，$C(\phi)$ がマルチンゲールなら，(2.1) と $C(\phi)$ の定義によって，

$$R_k(\phi)=E[R_{k+1}\mid\mathcal{F}_k]+\mathrm{Var}[V_{k+1}(\phi)-\theta_{k+1}\Delta X_{k+1}+\lambda(X_{k+1})X_{k+1}|\theta_{k+1}-\theta_{k+1}|\mid\mathcal{F}_k] \tag{3.1}$$

がわかる．

今，$k\in\{0,1,\ldots,T-1\}$ を固定して，ϕ' を時点 k での ϕ の局所摂動であるとすると，費用過程の定義より，

$$C_T(\phi')-C_{k+1}(\phi')=C_T(\phi)-C_{k+1}(\phi)$$

が成り立つ．$C(\phi)$ がマルチンゲールであるという仮定のもとでは，次が成り立つ:

$$R_k(\phi')=E[R_{k+1}(\phi)\mid\mathcal{F}_k]+E\left[(\Delta C_{k+1}(\phi'))^2\mid\mathcal{F}_k\right]. \tag{3.2}$$

今 (i) と (ii) を仮定する．ϕ' は時点 k での ϕ の局所摂動だから，

$$V_{k+1}(\phi')=V_{k+1}(\phi),\qquad \theta'_{k+2}=\theta_{k+2}, \tag{3.3}$$

それゆえに，

$$\Delta C_{k+1}(\phi')=V_{k+1}(\phi)-V_k(\phi')-\theta'_{k+1}\Delta X_{k+1}+\lambda(X_{k+1})X_{k+1}|\theta_{k+2}-\theta'_{k+1}|.$$

よって，(2.1), (3.1), (3.2), (ii) より，

$$\begin{aligned}R_k(\phi')&\geq E[R_{k+1}(\phi)\mid\mathcal{F}_k]+\mathrm{Var}[\Delta C_{k+1}(\phi')\mid\mathcal{F}_k]\\&\geq E[R_{k+1}(\phi)\mid\mathcal{F}_k]+\mathrm{Var}[\Delta C_{k+1}(\phi)\mid\mathcal{F}_k]\\&=R_k(\phi)\end{aligned}$$

が成り立つ．これは，ϕ が局所リスク最小化であることを示している．

逆に，ϕ が局所リスク最小化であることを仮定する．補題 2.1 より (i) は成り立つ．(2.1) と (3.2) を比較すると，任意の $\mathcal{F}_k$-可測な θ'_{k+1} と η'_k に対して，

$$E\left[(\Delta C_{k+1}(\phi'))^2\mid\mathcal{F}_k\right]\geq\mathrm{Var}[\Delta C_{k+1}(\phi)\mid\mathcal{F}_k].$$

特に，θ'_{k+1} を固定して，$E[\Delta C_{k+1}(\phi')\mid\mathcal{F}_k]=0$ となるように，η'_k を選ぶ．この事と上の不等式の $\Delta C_{k+1}(\phi')$ と (3.3) とを比較すると，(ii) を得る．

□

定理 *1.3* の証明．後ろ向き帰納法によって，$\theta^*_{T+1}=\bar{\theta}_{T+1}$ を満たす可予測過程 θ^* の存在と，次の (a)-(e) が，(a)(b) については $k=0,\ldots,T$ に対して，(c)(d)(e) については $k=1,\ldots,T$ に対して成り立つことを証明する:

(a) $\theta^*_{k+1}X_k\in\mathcal{L}^2(P)$.

(b) $W^*_k:=H-\sum_{j=k+1}^{T}\theta^*_j\Delta X_j+\sum_{j=k+1}^{T}X_j|\Delta\theta^*_{j+1}|\in\mathcal{L}^2(P)$.

(c) 確率変数 ν_k を (1.4) で定義したものとする．この時，

$$\theta^*_k=\frac{\mathrm{Cov}\left(E[W^*_k\mid\mathcal{F}_k]+\lambda(X_k)\nu_kX_k\theta^*_{k+1},X_k(1+\lambda(X_k)\nu_k)\mid\mathcal{F}_{k-1}\right)}{\mathrm{Var}\left[X_k(1+\lambda(X_k)\nu_k)\mid\mathcal{F}_{k-1}\right]}\qquad P\text{-a.s.} \tag{3.4}$$

を満たすような $\mathcal{F}_{k-1}$-可測な確率変数 $\delta^*_k\in[-1,+1]$ が存在する．

(d) $\theta^*_k\Delta X_k\in\mathcal{L}^2(P)$.

(e) θ^*_k は，$\theta_k\Delta X_k\in\mathcal{L}^2(P)$ と $\theta_kX_k\in\mathcal{L}^2(P)$ を満たす $\mathcal{F}_{k-1}$-可測な確率変数 θ_k について，

$$\mathrm{Var}\left[E[W^*_k\mid\mathcal{F}_k]-\theta_k\Delta X_k+\lambda(X_k)X_k|\theta^*_{k+1}-\theta_k|\mid\mathcal{F}_{k-1}\right]$$

を最小化するものである．

これが示されると, η^* を

$$\eta_k^* := E[W_k^* \mid \mathcal{F}_k] - \theta_{k+1}^* X_k \qquad \text{for } k = 0, 1, \dots, T$$

と定義すると, $\phi^* = (\theta^*, \eta^*)$ は局所リスク最小化解となる. 実際, η^* は明らかに適合過程になるし, (b) より $\theta_{k+1}^* X_k + \eta_k^* \in \mathcal{L}^2(P)$ もわかる. η^* と W_k^* の定義により, $V_k(\phi^*) = E[W_k^* \mid \mathcal{F}_k]$ となり $C(\phi^*)$ がマルチンゲールになる. それ故, 命題 1.2 により, ϕ^* は局所リスク最小化解である. また, η^* の定義により

$$E[W_k^* \mid \mathcal{F}_k] + \lambda(X_k)\nu_k X_k \theta_{k+1}^* = V_k^\nu(\phi^*),$$

故に, (3.4) を整理すると (1.5) が従う.

以下, (a)–(e) を帰納法によって示そう. もし, $\theta_{T+1}^* := \bar{\theta}_{T+1}$ と定義すると, (1.2) と (1.3) より, $k = T$ に対して (a) と (b) が成り立つ.

今, (a) と (b) が $k = j$ の時に成り立つと仮定する. この時, (a) と (b) が $k = j - 1$ の時にも成り立ち, 更に (c),(d),(e) が $k = j$ の時にも成立することを示そう. 関数 $f_j(c, \omega)$ と $g_j(c, \alpha, \omega)$ を

$$f_j(c, \omega) := \mathrm{Var}\left[E[W_j^* \mid \mathcal{F}_j] - cX_j + \lambda(X_j)X_j|\theta_{j+1}^* - c| \mid \mathcal{F}_{j-1}\right](\omega),$$

$$g_j(c, \alpha, \omega) := \mathrm{Cov}\left(E[W_j^* \mid \mathcal{F}_j] + \lambda(X_j)X_j\theta_{j+1}^* S_j^{(\alpha,c)}, X_j(1 + \lambda(X_j)S_j^{(\alpha,c)}) \mid \mathcal{F}_{j-1}\right)(\omega)$$

で定義する. ただし,

$$S_j^{(\alpha,c)} := \alpha\overline{\mathrm{sign}}(\theta_{j+1}^* - c) + (1 - \alpha)\underline{\mathrm{sign}}(\theta_{j+1}^* - c).$$

補題 2.2 と補題 2.3 より,

$$f_j(\theta_j^*(\omega), \omega) \leq f_j(c, \omega) \qquad P\text{-a.s. for all } c, \tag{3.5}$$

$$g_j(\theta_j^*(\omega), \alpha_j^*(\omega), \omega) = 0 \qquad P\text{-a.s.} \tag{3.6}$$

を満たす $\mathcal{F}_{j-1}$-可測な確率変数 θ_j^* と $\alpha_j^* \in [0, 1]$ が存在する.

ここで, $\delta_j^* := 2\alpha_j^* - 1$ と定義すると,

$$S_j^{(\alpha_j^*, \theta_j^*)} = \mathrm{sign}(\theta_{j+1}^* - \theta_j^*) + \delta_j^* I_{\{\theta_{j+1}^* = \theta_j^*\}} = \nu_j$$

となり, (3.6) を整理すると (3.4) が従う. 故に (c) が成り立つ.

次に (d) が $k = j$ の時に成り立つことを示そう. 過程 $\gamma \in \Gamma$ を $\gamma_j = \nu_j$ を満たす任意の過程とし,

$$W_j^\gamma := E[W_j^* \mid \mathcal{F}_j] + \lambda(X_j)\nu_j\theta_{j+1}^*$$

で定義する. $k = j$ の時には (a) と (b) が成り立つので, $W_j^\gamma \in \mathcal{L}^2(P)$ が成り立つ, 故に (3.4) は次のように書き換えられる:

$$\theta_j^* = \frac{\mathrm{Cov}(W_j^\gamma, \Delta X_j^\gamma \mid \mathcal{F}_{j-1})}{\mathrm{Var}[\Delta X_k^\gamma \mid \mathcal{F}_{j-1}]}.$$

Cauchy-Schwarz の不等式と補題 2.8 より,

$$\begin{aligned} E[(\theta_j^*\Delta X_j)^2] &\leq E\left[\frac{\mathrm{Var}[W_j^\gamma \mid \mathcal{F}_{j-1}]}{\mathrm{Var}[\Delta X_j^\gamma \mid \mathcal{F}_{j-1}]} E[\Delta X_j^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}]\right] \\ &\leq \frac{1}{c} E\left[E[(W_j^\gamma)^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}] \frac{E[\Delta X_j^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}]}{\mathrm{Var}[\Delta X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}]}\right] \\ &\leq \frac{1}{c}(1 + C_{MVT}(0)) E[(W_j^\gamma)^2] < \infty. \end{aligned}$$

よって, (d) が $k = j$ の時に成り立つ. 過程 X は実質的リスクだから, 補題 2.6 と同様にすると $\theta_j^* X_{j-1} \in \mathcal{L}^2(P)$ がわかる, これは $k = j - 1$ の時の (a) に他ならない. 同時に $\theta_j^* X_j = \theta_j^* \Delta X_j + \theta_j^* X_{j-1} \in \mathcal{L}^2(P)$ もわかる.

もし θ_j が $\mathcal{F}_{j-1}$-可測かつ $\theta_j\Delta X_j \in \mathcal{L}^2(P)$ と $\theta_j X_j \in \mathcal{L}^2(P)$ を満たすとすると,

$$\mathrm{Var}\left[E[W_j^* \mid \mathcal{F}_j] - \theta_j\Delta X_j + \lambda(X_j)X_j|\theta_{j+1}^* - \theta_j| \mid \mathcal{F}_{j-1}\right](\omega) = f_j(\theta_j(\omega), \omega) \qquad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ. それゆえに $k = j$ の時の (e) が成り立つ. 最後に, $k = j$ の時に (a), (b), (d) が成り立ち, $\theta_j^* X_j \in \mathcal{L}^2(P)$ なので,

$$W_{j-1}^* = W_j^* - \theta_j^*\Delta X_j + \lambda(X_j)X_j|\theta_{j+1}^* - \theta_j^*| \in \mathcal{L}^2(P)$$

がわかる. 故に, (b) が $k = j - 1$ の時に成り立つ. 帰納法により定理は証明された.

□

参考文献

[1] C. Edirsinghe, V. Naik and R. Uppal, Optimal Replication of Options with Transactions Costs and Trading Restrictions, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.28, pp.117–138, 1993.

[2] D. Lamberton, H. Pham and M. Schweizer, Local Risk-Minimization under Transaction Costs, Mathematics of Operations Research, Vol.23, pp.585–612, 1998.