

[研究ノート]

次元の考え方をもとにした図形概念を育てる数学教育 —単純図形と計量図形—

¹ 内田 陽三、² 田中 俊光

¹ 山陽小野田市立山口東京理科大学 共通教育センター

² 山口県教育会

Mathematics Education That Nurtures Geometric Concepts Based on The Concept of Dimensions —Simple Figure and Measuring Figure—

¹ Yozo UCHIDA, ² Toshimitsu TANAKA

¹ Center for Liberal Arts and Sciences, Sanyo-Onoda City University

² Educational Society of Yamaguchi Prefecture

要 約

中学校の平面図形の学習では三角形をもとに考え、空間図形の学習では四面体をもとに考える。ところが、小学校の平面図形の学習では正方形をもとに考え、空間図形の学習では立方体をもとに考える。ここで、平面図形のもとになる図形は三角形・正方形のどちらか、空間図形のもとになる図形は四面体・立方体のどちらか、という疑問が生まれる。

そこで、「単純図形とはその次元の図形を形づくりのもとになる最も単純な図形で、2次元では三角形、3次元では四面体がそれにあたる」、「計量図形とはその次元の図形の計量をするもとになる図形で、2次元では数量『面積』を測るもとになる『面積1の正方形』、3次元では数量『体積』を測るもとになる『体積1の立方体』がそれにあたる」と定義する。そして、研究仮説を「各次元の図形のもとになる図形は、『単純図形』と『計量図形』の2系列があり、それぞれのしくみを考察する手順を生徒の思考に沿った授業づくりレベルで考えることで、形と計量といった図形概念を育てるための手だてを一般化できる」とする。

本稿では、中学1年の授業「次元を超える—単純図形と計量図形—」をつくる過程をもとに、授業の流れ「4次元の図形のイメージをつかむ」→「規則を見つける」→「規則が成り立つ理由をつかむ」と、手だて「次元の順に整理する」「比較しやすいように学習プリントを工夫する」の2つをベースに、「『図形』と『特徴』と『名前』に絞り込んで4次元の図形をイメージさせる」→「一度次元を下げてデータを増やす」→「図形の成り立ちを整理する」について述べていく。

キーワード: 数学教育、次元、単純図形、計量図形

KEY WORDS: mathematics education, dimension, simple figure, measuring figure

1 はじめに

中学校の平面図形の学習では三角形をもとに考え、空間図形の学習では四面体をもとに考える。ところが、小学校の平面図形の学習では正方形をもとに考え、空間図形の学習では立方体をもとに考える。ここで、平面図形のもとになる図形は三角形・正方形のどちらか、空間図形のもとになる図形は四面体・立方体のどちらか、という疑問が生まれる。

そこで、「単純図形とはその次元の図形を形づくるもとになる最も単純な図形で、2次元では三角形、3次元では四面体がそれにあたる」、「計量図形とはその次元の図形の計量をするもとになる図形で、2次元では数量『面積』を測るもとになる『面積1の正方形』、3次元では数量『体積』を測るもとになる『体積1の立方体』がそれにあたる」と定義する。そして、研究仮説を「各次元の図形のもとになる図形は、『単純図形』と『計量図形』の2系列があり、それぞれのしくみを考察する手順を生徒の思考に沿った授業づくりレベルで考えることで、形と計量といった図形概念を育てるための手だてを一般化できる」とする。

本稿は、これまで実践してきた研究¹⁾を再構成したものであり、平成29年告示中学校学習指導要領解説数学編²⁾の第1学年の内容B(2)空間図形にある「平面で考察したことを類推によって空間に拡張し、空間についての豊かな感性を育むことも大切である」を発展させたものである。

以下、中学1年の授業「次元を超える—単純図形と計量図形—」をつくる過程をもとに述べていく。

2 単純図形のしくみ

(1) 規則を見つける

表1は、単純図形を次元の順に整理した表である。横項目を2次元「三角形」3次元「四面体」…と整理するだけでなく、縦項目についても、図形の0次元の構成要素

「点」、1次元の構成要素「辺」、2次元の構成要素「面」…と整理している。

3次元の構成要素の名前は「胞(ほう)」と呼ぶ。胞の定義は「面で囲まれる空間の部分」であるが、「小部屋」とい

表1 単純図形の表

次元	2次元	3次元	4次元	
名前	三角形	四面体		
構成要素	点	3	4	
	辺	3	6	
	面	1	4	
	胞		1	
	?			

う言葉を使う方が生徒にとって分かりやすいであろう。4次元の構成要素「胞で囲まれる4次元空間の部分」には名前がないので「？」と表し、「4次元の小部屋」という言葉を使う方が生徒にとって分かりやすいであろう。

表1では、4次元の単純図形の点・辺・面…の数を求めるにはデータ不足である。そこで、一度次元を下げたデータを増やす必要がある。

1次元の図形は「線分」である。それを形づくるもとになる最も単純な図形「1次元の単純図形」も「線分」である。0次元の図形は「点」である。それを形づくるもとになる最も単純な図形「0次元の単純図形」も「点」である。

表2 単純図形の表

次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元
名前	点	線分	三角形	四面体	
構成要素	点	1	2	3	4
	辺		1	3	6
	面			1	4
	胞				1
	?				

表2は、0次元の単純図形「点」と1次元の単純図形「線分」を含めた表である。

この表2で考えると、下の図1に矢線で表している規則が見つかる。

次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元	
名前	点	線分	三角形	四面体	五胞体	
構成要素	点	1	2	3	4	5
	辺		1	3	6	10
	面			1	4	10
	胞				1	5
	?					1

図1 単純図形の表2

「左横と左斜め上の数をたす」という規則である。例えば、3次元の単純図形「四面体」の面の数「4」は、左横の「1」と左斜め上の「3」をたせばよい。この規則にしたがって、4次元の単純図形の点・辺・面…の数を求めると、「胞」の数が5になる。4次元の単純図形は「5つの胞に囲まれた図形」であるので、「五胞体」と名付けることができる。

また、表の空欄部分に0があると考えれば、「左横と左斜め上の数をたす」という規則は、表全体で成り立つといえる。

(2) 4次元の単純図形のイメージをつかむ

次元を超える経験をする授業を数学の指導計画に位置付ける場合に大切なことが、「必要感」である。空間図形を発展させ次元を超えるという知的好奇心だけでなく、生徒が4次元の単純図形「五胞体」の点・辺・面…の数を求めたくなる具体的な探究課題が大切になる。

その具体的な探究課題に当たるものとして考えたのが、「4次元の単純図形のイメージをつかむ」である。

単純図形の規則を考える前に、「4次元の単純図形は、図にかくこともできないし模型をつくることもできない。でも、五胞体という名前で、5つの胞で囲まれているらしい。そんな不思議な図形の点・辺・面…の数が求められるなんて…」という気にさせたいのである。

表3 単純図形のイメージ

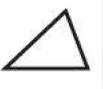
次元	1次元	2次元	3次元	4次元
図形				かけない
特徴	2つの点 で囲まれ た図形	3つの辺 で囲まれ た図形	4つの面 で囲まれ た図形	5つの胞 で囲まれ た図形
名前	線分 二点形	三角形 三辺形	四面体 四面体	五胞体 五胞体

表3は、「図形」と「特徴」と「名前」に絞り込んで、次元に沿った単純図形の流れから考えた4次元の単純図形のイメージである。図にはかけないが、規則をもとに特徴をつかみ、その特徴から名前をつけることができるのである。

(3) 規則が成り立つ理由をつかむ

「左横と左斜め上の数をたす」という表での規則が成り立つ理由は、単純図形の成り立ちを整理すると明らかになる。

図2は、単純図形の成り立ちを次元に沿って整理したものである。

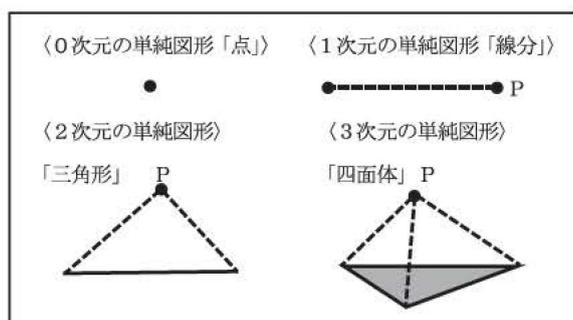


図2 単純図形の成り立ち

1次元の単純図形「線分」は、0次元の単純図形「点」以外の場所にもう1つ「点P」をとり、結ぶとできあがる。

2次元の単純図形「三角形」は、1次元の単純図形「線分」を含む直線以外の場所に「点P」をとり、結ぶとできあがる。

3次元の単純図形「四面体」は、2次元の単純図形「三角形」を含む平面以外の場所に「点P」をとり、結ぶとできあがる。したがって、四面体の辺の数は、点Pと三角形の点を結んでできる辺の数だけ、三角形の辺の数より増える。また、四面体の面の数は、点Pと三角形の辺でつくる面の数だけ、三角形の面の数より増える。

4次元の単純図形「五胞体」は、3次元の単純図形「四面体」を含む空間以外の場所に「点P」をとり、結ぶとできあがる。したがって、五胞体の辺の数は、点Pと四面体の点を結んでできる辺の数だけ、四面体の辺の数より増える。また、五胞体の面の数は、点Pと四面体の辺でつくる面の数だけ、四面体の面の数より増える。

これが、「左横と左斜め上の数をたす」という表での規則が成り立つ理由である。

この理由については、「次の次元の単純図形のつくり方を考えてみよう」というヒントを準備しておくが、初めて4次元のことを考える生徒にとって負担が大きすぎるので、授業者が紹介してもよいと考える。

3 計量図形のしくみ

(1) 規則を見つける

表4は、計量図形を次元の順に整理した表である。横項目を2次元「正方形」、3次元「立方体」…と整理するだけでなく、縦項目についても、図形の0次元の構成要素「点」、1次元の構成要素「辺」、2次元の構成要素「面」…と整理している。

表4では、4次元の計量図形の点・辺・面…の数を求めるにはデータ不足である。そこで、一度次元を下げデータを増やす必要がある。

表4 計量図形の表

次元	2次元	3次元	4次元
名前	正方形	立方体	
構成要素	点	4	8
	辺	4	12
	面	1	6
	胞		1
	?		

1次元の図形は「線分」である。その長さを測るもとなる図形「1次元の計量図形」は「長さ1の線分」である。0次元の図形は「点」である。その個数を数えるもとなる図形「0次元の計量図形」は「個数1の点」である。

表5 計量図形の表

次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元
図形 名前	点	線分	正方形 正四辺形	立方体 正六面体	
構成 要素	点	1	4	8	
	辺		4	12	
	面		1	6	
	胞			1	
	?				

表5は、0次元の計量図形「個数1の点」と1次元の計量図形「長さ1の線分」を含めた表である。

この表5で考えると、図3に矢線で表している規則が見つかる³⁾。

次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元
図形 名前	点	線分 正二点形	正方形 正四辺形	立方体 正六面体	超立方体 正八胞体
構成 要素	点	1	4	8	16
	辺		1×2 → 4	4×2 → 12	12×2 → 32
	面			1×2 → 6	6×2 → 24
	胞				1×2 → 8
	?				1

図3 計量図形の表5

「左横を2倍した数と左斜め上の数をたす」という規則である。例えば、3次元の計量図形「体積1の立方体」の面の数「6」は、左横の「1」を2倍した「2」と左斜め上の「4」をたせばよい。この規則にしたがって、4次元の計量図形の点・辺・面…の数を求めると、「胞」の数が8になる。4次元の計量図形は「8つの胞に囲まれた図形」であるので、「正八胞体」と名付けることができる。

また、表の空欄部分に0があると考えれば、「左横を2倍した数と左斜め上の数をたす」という規則は、表全体で成り立つといえる。

(2) 4次元の計量図形のイメージをつかむ

先に述べた単純図形の場合と同様に、次元を超える経験をする授業を数学の指導計画に位置付ける場合に大切なことが、「必要感」である。

「4次元の計量図形のイメージをつかむ」ことで、計量図形の規則を考える前に、「4次元の計量図形は、図にかくこともできないし模型をつくることもできない。でも、正八胞体という名前で、8つの胞で囲まれているらしい。そんな不思議な図形の点・辺・面…の数が求められるなんて

…」という気にさせたいのである。

表6 計量図形のイメージ

次元	1次元	2次元	3次元	4次元
図形				かけない
特徴	2つの点 で囲まれ た図形	4つの辺 で囲まれ た図形	6つの面 で囲まれ た図形	8つの胞 で囲まれ た図形
名前	線分 正二点形	正方形 正四辺形	立方体 正六面体	超立方体 正八胞体

表6は、「図形」と「特徴」と「名前」に絞り込んで、次元に沿った計量図形の流れから考えた4次元の計量図形のイメージである。図にはかけないが、規則をもとに特徴をつかみ、その特徴から名前をつけることができるのである。

(3) 規則が成り立つ理由をつかむ

「左横を2倍した数と左斜め上の数をたす」という表での規則が成り立つ理由は、計量図形の成り立ちを整理すると明らかになる。

図4は、計量図形の成り立ちを次元に沿って整理したものである。

1次元の計量図形「長さ1の線分」は、0次元の計量図形「個数1の点」を長さ1だけ移動させたときの動いた跡である。

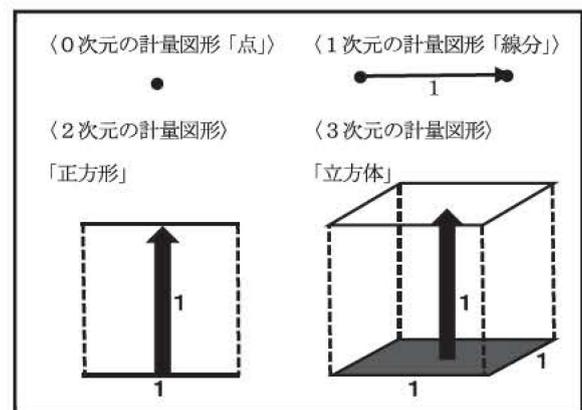


図4 計量図形の成り立ち

2次元の計量図形「面積1の正方形」は、1次元の計量図形「長さ1の線分」をその垂直方向に長さ1だけ移動させたときの動いた跡である。

3次元の計量図形「体積1の立方体」は、2次元の計量図形「面積1の正方形」をその垂直方向(第3座標軸の方向)に長さ1だけ移動させたときの動いた跡である。したがって、立方体の辺の数は、「下面の正方形の辺の数+上

面の正方形の辺の数+正方形の点が動いてできる辺の数」になる。また、立方体の面の数は、「下面の正方形の面の数+上面の正方形の面の数+正方形の辺が動いてできる面の数」になる。

4次元の計量図形「正八胞体」は、3次元の計量図形「体積1の立方体」をその垂直方向(第4座標軸の方向)に長さ1だけ移動させたときの動いた跡である。したがって、正八胞体の辺の数は、「下空間の立方体の辺の数+上空間の立方体の辺の数+立方体の点が動いてできる辺の数」になる。また、正八胞体の面の数は、「下空間の立方体の面の数+上空間の立方体の面の数+立方体の辺が動いてできる面の数」になる。

これが、「左横を2倍した数と左斜め上の数をたす」という表での規則が成り立つ理由である。

この理由については、「次の次元の計量図形のつくり方を考えてみよう」というヒントを準備しておくが、初めて4次元のことを考える生徒にとって負担が大きすぎるので、授業者が紹介してもよいと考える。

4 しくみを比較する

単純図形も計量図形も、「次元の順に整理する」という考え方をベースに、「4次元の図形のイメージをつかむ」→「規則を見つける」→「規則が成り立つ理由をつかむ」といった手順で、それぞれのしくみをつかみ、次元を超えることができる。

同じ手順であれば、学習プリントを左右で比較できるものにすればよいと考えた。

次ページの図5が学習プリントである。これを見れば、授業の全体像と流れがわかる。

5 おわりに

これまで「次元を超える－単純図形と計量図形－」の授業づくりをもとに、授業の流れと手だてを述べてきた。

授業の流れは、「4次元の図形のイメージをつかむ」→「規則を見つける」→「規則が成り立つ理由をつかむ」である。

そして、手だては、「次元の順に整理する」「比較しやすいように学習プリントを工夫する」の2つをベースに、「『図形』と『特徴』と『名前』に絞り込んで4次元の図形をイメージさせる」→「一度次元を下げてもデータを増やす」→「図形の成り立ちを整理する」である。

以上のことから、「ベースとなる2つの手だて」と「授業の流れに沿った3つの手だて」を講じることで、次元を超えて、形と計量といった図形概念を育てることができるといえよう。

平成30年告示高等学校学習指導要領解説数学編理数編⁴⁾の数学I〔課題学習〕に「四平方の定理」の例示がある。2次元のピタゴラスの定理を3次元へ発展させるものである。中学校段階から次元を超える授業を指導計画へ位置づけ、高等学校数学へつなげていくことが大切だと考える。

参考文献

- 1) 田中俊光:山口大学教育学部附属山口中学校研究紀要第42号(1998年)
- 2) 文部科学省:中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編 平成29年7月
- 3) 大人になってからの再学習「4次元立方体の理解」
<http://zellij.hatenablog.com/entry/20121201/pl>
- 4) 文部科学省:高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編 平成30年7月

中学1年 数学プリント (単純図形と計量図形)						1年 組 番 _____					
単純図形：						計量図形：					
1 2次元の単純図形「三角形」にあたる図形を考えよう。						1 2次元の計量図形「正方形」にあたる図形を考えよう。					
次元	1次元	2次元	3次元	4次元		次元	1次元	2次元	3次元	4次元	
図形						図形					
特徴		3つの辺 で囲まれ た図形				特徴		4つの辺 で囲まれ た図形			
名前		三角形				名前		正方形			
※ 面で囲まれた小部屋を「胞(ほう)」と呼びます。						※ 面で囲まれた小部屋を「胞(ほう)」と呼びます。					
2 それぞれの次元の単純図形について調べよう。						2 それぞれの次元の計量図形について調べよう。					
(1) 点・辺・面…の数を求めよう。						(1) 点・辺・面…の数を求めよう。					
次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元	次元	0次元	1次元	2次元	3次元	4次元
図形			三角形			図形			正方形		
名前						名前					
点			3			点			4		
辺			3			辺			4		
面			1			面			1		
胞						胞					
?						?					
※ 胞で囲まれた4次元の小部屋を「？」と表しました。						※ 胞で囲まれた4次元の小部屋を「？」と表しました。					
(2) 次の次元の単純図形の「点・辺・面・胞・？」の数を求めるための規則をまとめよう。						(2) 次の次元の計量図形の「点・辺・面・胞・？」の数を求めるための規則をまとめよう。					
(3) そうなる理由を記録しよう。						(3) そうなる理由を記録しよう。					
3 感想											

図5 学習プリント