一般化された Grassmann Manifold について

北　村　三　郎

§1. 緒　論

V を n 次元ベクトル空間とし，G(p, V) を V の p 次元部分空間の集合とする。G(p, V) は p(v−p) 次元 analytic manifold にすることができる。そのためには通常 fibre bundle の概念が用いられる。[1] 前の論文[2] ではベクトル空間の dual basis の概念を用いてこれを示した。これが通常 Grassmann manifold と呼ばれるものである。

ここでは，これを次のように拡張する。

E^n を n 次元 Euclid 空間とし，$\mathcal{G}(p, E^n)$ を E^n の p次元線型部分空間の集合とする。$\mathcal{G}(p, E^n)$ を $(p+1)(n-p)$ 次元 analytic manifold にすることができる。このために，前の論文と同じくベクトル空間の dual basis の概念を用いる。

§2. E^n の p 次元線型部分空間の標準形

$\Pi \in \mathcal{G}(p, E^n)$ とする。任意の点 $P \in \Pi$ をとり，E^n の原点 O を通り Π に平行な p 次元線型部分空間を W_p として，$\Pi = (P, W_p)$ と表わすことにする。

座標の原点を通り W_p に直交する $(n-p)$ 次元線型部分空間を $W_p^\perp$ で表わし，Π と $W_p^\perp$ との交点を A とすれば，点 A は一意的に定まり，且つ $\Pi = (A, W_p)$ と一意的に表わすことができる。

いま，E^n の座標の原点 O を固定して得られる n 次元ベクトル空間を便宜上 V で表わすと

$W_p \in G(p, V)$ であり $A \in (O, W_p^\perp)$ であるから

$$\mathcal{G}(p, E^n) = \left\{ (A, W_p) \mid W_p \in G(p, V), A \in (O, W_p^{\perp}) \right\}$$

と表わすことができる。

§3. $A \in (O, W_p^{\perp})$ の座標

V の正規直交基を $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ とする。

V の双対空間を V^* とかき，$v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ の双対基を $v^{*1}, v^{*2}, \cdots,$ v^{*n} とする。v^{*i} は V 上の一次関数であるから，それを W_p 上に制限したものを $v^{*i} \mid W_p$ と表わし，また $W_p^{\perp}$ 上に制限したものを $v^{*i} \mid W_p^{\perp}$ と表わす。

$v^{*1} \mid W_p, v^{*2} \mid W_p, \cdots\cdots, v^{*n} \mid W_p$ は W_p^* を generate するから，これらのうちのある p 個が W_p^* の basis となる。それを $v^{*i_1} \mid W_p, v^{*i_2} \mid W_p,$ $\cdots\cdots v^{*i_p} \mid W_p$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_p \leqq n)$ とする。

$(1, 2, \cdots\cdots, n)$ に対する $(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_p)$ の補集合を $(j_1, j_2, \cdots\cdots, j_{n-p})$ $(1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_{n-p} \leqq n)$ とすると，

$$v^{*j_k} \mid W_p = \sum_{\ell=1}^{p} h_\ell^k \, v^{*i_\ell} \mid W_p \quad (k=1, 2, \cdots\cdots, n-p)$$

とかける。このとき W_p の一つの basis $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots\cdots, u_{i_p}$ は $v^{*i_1} \mid W_p,$ $v^{*i_2} \mid W_p, \cdots\cdots, v^{*i_p} \mid W_p$ の dual basis として $u_{i_k} = v_{i_k} + \sum_{\ell=1}^{n-p} h_k^\ell \, v_{j_\ell}$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, p)$ と表わされる[2)]。

次に，$w_t = v_{j_t} - \sum_{\ell=1}^{p} h_\ell^t \, v_{i_\ell}$ $(t=1, 2, \cdots\cdots, n-p)$

とおくと $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{m-p}$ は $W_p^{\perp}$ の basis となり，その dual basis は $v^{*j_1} \mid W_p^{\perp}, v^{*j_2} \mid W_p^{\perp}, \cdots\cdots, v^{*j_{n-p}} \mid W_p^{\perp}$ となることを示す。

$w = \sum_{t=1}^{n} \alpha^t v_t$ が $W_p^{\perp}$ の元であるための必要十分な条件は (w, u_{j_k}) $=0$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, p)$ である。

$$(w_t,\ u_{ik}) = (v_{jt} - \sum_{s=1}^{p} h_s^t\, v_{is},\quad v_{ik} + \sum_{\ell=1}^{n-p} h_k^\ell\, v_{j\ell})$$

$$= h_k^t - h_k^t$$

$$= 0 \qquad\qquad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ p,\ t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-p)$$

であるから $w_t \in W_p^\perp$ であることがわかる。

次に，$w = \sum_{t=1}^{n} \alpha^t v_t \in W_p^\perp$ とすると，

$$(w,\ u_{ik}) = \left(\sum_{t=1}^{n} \alpha^t\ v_t,\quad v_{ik} + \sum_{\ell=1}^{n-p} h_k^\ell\ v_{j\ell} \right)$$

$$= \alpha^{ik} + \sum_{\ell=1}^{n-p} \alpha^{j\ell}\ h_k^\ell = 0 \qquad\qquad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ p)$$

故に $$\alpha^{ik} = -\sum_{\ell=1}^{n-p} \alpha^{j\ell}\ h_k^\ell \qquad\qquad (k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ p)$$

そこで $$w = \sum_{t=1}^{n-p} \alpha^{jt}\ v_{jt} + \sum_{s=1}^{p} \alpha^{is}\ v_{is}$$

$$= \sum_{t=1}^{n-p} \alpha^{jt}\ v_{jt} - \sum_{s=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n-p} \alpha^{j\ell}\ h_s^\ell\ v_{is}$$

$$= \sum_{t=1}^{n-p} \alpha^{jt}\ (v_{jt} - \sum_{s=1}^{p} h_s^t\ v_{is})$$

$$= \sum_{t=1}^{n-p} \alpha^{jt}\ w_t$$

従って任意の $w \in W_p^\perp$ は $w_1,\ w_2,\cdots\cdots,\ w_{n-p}$ の一次結合で表わされる。

一方，$W_p^\perp$ の次元は $n-p$ である。よって $w_1,\ w_2,\cdots\cdots,\ w_{n-p}$ は $W_p^\perp$ の basis である。これは V の正規直交基 $v_1,\ v_2,\cdots\cdots,\ v_n$ と $(i_1,\ i_2,\cdots\cdots,\ i_p)$ により決る。

一般に $v \in V$ 上の $v^* \in V^*$ の値を $\langle v,\ v^* \rangle$で表わす。

$$\langle w_t,\quad v^{*js} \mid W_p^\perp \rangle = \langle v_{jt} - \sum_{\ell=1}^{p} h_\ell^t\ v_{i\ell},\quad v^{*js} \rangle = \delta_t^s$$

故に $\{w_t\}$ $(t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-p)$ は $v^{*j_1} \mid W_p^\perp,\ v^{*j_2} \mid W_p^\perp,\ \cdots\cdots,$

$v^{*j_{n-p}} \mid W_p^\perp$ の dual basis である。

点 A は $(O, W_p^{\perp})$ 上にあるから,

$$\overrightarrow{OA}=x^1 w_1 + x^2 w_2 + x^3 w_3 + \cdots\cdots + x^{n-p} w_{n-p}$$

と表わせる。

こうして, (A, W_p) の点 A に座標 $(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^{n-p})$ が定まる。この座標は V の正規直交基 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n$ と W_p^* の basis $v^{*i_1}|W_p$, $v^{*i_2}|W_p, \cdots\cdots, v^{*i_p}|W_p$ のとりかたに関係する。

そこで $f_{W_p}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}(A) = (x^1, x^2, \cdots\cdots, x^{n-p})$ とかくことにする。

明らかに $f_{W_p}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} : (O, W_n^{\perp}) \rightarrow R^{n-p}$ は1対1で onto である。

§4. $\mathcal{G}(p, E^n)$ の位相

今, 任意の $(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_p)$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots\cdots < i_p \leqq n)$ に対して, $v^{*i_1}|W_p, v^{*i_2}|W_p, \cdots\cdots, v^{*i_p}|W_p$ が一次独立である W_p の集合を $U^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ で表わす。

$W_p \in U^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ に対して

$$v^{*j_k}|W_p = \sum_{\ell=1}^{p} h_\ell^k v^{*i_\ell}|W_p \quad (k=1, 2, \cdots\cdots, n-p)$$

と表わすことが出来るから, W_p に対して係数の行列 $H = (h_\ell^k)$ を対応させ, $\phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}(W_p) = (h_\ell^k)$ とかくことにする。前の論文[2)]で示したように $\phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} : U^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} \rightarrow R^{p(n-p)}$ は1対1で onto である。

そこで

$$\Phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}(A, W_p) = \left(f_{W_p}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}(A), \phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}(W_p) \right)$$

と定義することにより $\mathcal{G}(p, E^n)$ の subset $\mathcal{U}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} = \{(A, W_p) |$ $A \in (O, W_n^{\perp}), W_p \in U^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}\}$ から $R^{n-p} \times R^{p(n-p)}$ 上への1対1 mapping が定まる。

$\mathcal{G}(p, E^n)$ の開集合の基を，$R^{(p+1)(n-p)}$ の開集合の基の $(\Phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p})^{-1}$ による像と定義する。

$\mathcal{G}(p, E^n)$ は可算基をもつ。それは $\mathcal{G}(p, E^n)$ が $\mathcal{U}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ の $\binom{n}{p}$ 個で cover されて，各 $\mathcal{U}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ は可算基をもつからである。

$\mathcal{G}(p, E^n)$ は Hausdorff 空間である。

$\mathcal{G}(p, E^n)$ は正則となる。これを示すためには R^{n-p}, $R^{p(n-p)}$ の閉じた ε-近傍を，それぞれ A, B とするとき，$(\Phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p})^{-1}$ による $A \times B$ の像が $\mathcal{G}(p, E^n)$ で閉であることを示せばよい。

簡単のために $(i_1, i_2, \cdots\cdots, i_p) = (1, 2, \cdots\cdots, p)$ としても一般性を失わない。

$(\Phi^{1,2,\cdots\cdots,p})^{-1}$ $(A \times B)$ の元の列 $\Pi_m = (X_m, W_{mp})$ が $\Pi = (X, W_p)$ に収束するとする。このとき $\Pi = (X, W_p)$ が $(\Phi^{12 \cdots\cdots p})^{-1}$ $(A \times B)$ に属することをいえばよい。

今 $\Pi = (X, W_p) \in \mathcal{U}^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ とする。前の論文[2]で示したように

$$\phi^{1 2 \cdots\cdots p} (W_{m p}) = (h^k_{m_\ell}) = H_m$$

$$\phi^{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} (W_p) = (h^k_\ell) = H \quad \text{とおくと}$$

$W_{m p}$ は

$$\begin{pmatrix} u^m_1 \\ u^m_2 \\ \vdots \\ u^m_p \end{pmatrix} = (EH_m) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

である $u^m_1, u^m_2, \cdots\cdots, u^m_p$ を basis とし，

W_p は

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = (EH) \begin{pmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ \vdots \\ v_{i_p} \\ v_{j_1} \\ \vdots \\ v_{j_{n-p}} \end{pmatrix} = (PQ) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

である $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_p$ を basis とする。ここに行列 (PQ) は行列 (EH)

の列に置換$\begin{pmatrix} 1, & 2, \cdots\cdots, & p, & p+1, \cdots\cdots, & n \\ i_1, & i_2, \cdots\cdots, & i_p, & j_1, \cdots\cdots, & j_{n-p} \end{pmatrix}$をほどこして得られるものである。

$W_{mp} \to W_p$ であるから，適当な正則行列の列 $\{T_m\}$ を選んで,

$$T_m\ (EH_m) \to (PQ)$$

とすることができる。したがって,

$$T_m \to P,\ T_m H_m \to Q$$

一方 B は閉 ε-近傍であるから $H_m \to H_0 \in B$ なる H_0 が存在する。
故に $P\ (EH_0) = (PQ)$

(PQ)の rank は p であるから，P は regular である。 故に $H_0 = P^{-1}Q \in B$ である。

よって W_p は $(\phi^{12\cdots\cdots p})^{-1}(B)$ の元である。

次に

$$f^{1\,2\,\cdots\cdots\,p}_{W_{mp}}\ (X_m) = (x^1_m,\ x^2_m,\ \cdots\cdots,\ x^{n-p}_m)$$

$$f^{1\,2\,\cdots\cdots\,p}_{W_p}\ (X) = (x^1,\ x^2, \cdots\cdots,\ x^{n-p})$$

とおく。 A は閉 ε-近傍であるから$(x^1_m,\ x^2_m,\ \cdots\cdots,\ x^{n-p}_m) \to (y^1, y^2, \cdots\cdots, y^{n-p}) \in A$, となるような Π_m の部分列が存在する。その部分列を更めて Π_m とする。

$v^{*p+1} \mid W^{\perp}_{mp},\ v^{*p+2} \mid W^{\perp}_{mp}, \cdots\cdots,\ v^{*n} \mid W^{\perp}_{mp}$ の dual basis を w_{m1}, $w_{m2}, \cdots\cdots, w_{mp}$ $(m=1,2,\cdots\cdots)$ とし,

$v^{*p+1} \mid W^{\perp}_{p},\ v^{*p+2} \mid W^{\perp}_{p}, \cdots\cdots,\ v^{*n} \mid W^{\perp}_{p}$ の dual basis を $w_1,\ w_2$, $\cdots\cdots,\ w_p$ とする。

行列で表わすと,

$$(w_{m1},\ w_{m2},\ \cdots\cdots,\ w_{m\,n-p}) = (v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_n) \begin{pmatrix} -H_m \\ E \end{pmatrix}$$

$$(w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots,\ w_{n-p}) = (v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_n) \begin{pmatrix} -P^{-1} \\ QE \end{pmatrix}$$

である。

$X_m \to X$ であるから

$$\begin{pmatrix} -H_m \\ E \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ \vdots \\ x_m^{n-p} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -P^{-1}Q \\ E \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-p} \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} -P^{-1}Q \\ E \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P^{-1}Q \\ E \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-p} \end{pmatrix}$$

従って $f_{W_p}^{1\,2\,\cdots\cdots\,p}(X) \in A$

従って $\Pi = (X,\ W_p) \in (\Phi^{1\,2\,\cdots\cdots\,p})^{-1}(A \times B)$

§5. $\mathcal{G}(p,\ E^n)$ の解析的構造

$\mathcal{G}(p, E^n)$ は§4で定義した写像 $\Phi^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p} : \mathcal{U}^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p} \to R^{(p+1)(n-p)}$ を座標写像とする解析的多様体であることを示そう。そのためには

$(A, W) \in \mathcal{U}^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p} \cap \mathcal{U}^{s_1\,s_2\,\cdots\cdots\,s_p}$ として

$\Phi^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p} \cdot (\Phi^{s_1\,s_2\,\cdots\cdots\,s_p})^{-1} : R^{(p+1)(n-p)} \to R^{(p+1)(n-p)}$ が analytic であることを示せばよい。

簡単のために $(s_1,\ s_2, \cdots\cdots, s_p) = (1,\ 2, \cdots\cdots,\ p)$ としても一般性を失わない。

$$\Phi^{1\,2\,\cdots\cdots\,p}(A,\ W_p) = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\ x_p,\ h_\ell^k)$$

$$(k=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n-p\ ;\ \ell=1,\ 2, \cdots\cdots,\ p)$$

$$\Phi^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p}(A,\ W_p) = (y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots\ y_p,\ h'^k_\ell)$$

$$(k=1,\ 2, \cdots\cdots,\ n-p\ ;\ \ell=1,\ 2, \cdots\cdots,\ p)$$

とする。

$v^{*1} \mid W_p,\ v^{*2} \mid W_p, \cdots\cdots, v^{*p} \mid W_p$ の dual basis を $u_1,\ u_2, \cdots\cdots,\ u_p$

$v^{*i_1} \mid W_p,\ v^{*i_2} \mid W_p, \cdots\cdots, v^{*i_p} \mid W_p$ の dual basis を $u_1',\ u_2',\ \cdots\cdots,\ u_p'$

とする。

行列で表わすと

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & h_1^1 & h_1^2 & \cdots\cdots & h_1^{n-p} \\ & 1 & & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & & 1 & h_p^1 & h_p^2 & \cdots\cdots & h_p^{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (EH) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_p' \end{pmatrix} = (EH') \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{ip} \\ v_{j1} \\ \vdots \\ v_{jn-p} \end{pmatrix} = (PQ) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ここに P は p 次の正方行列，Q は (p, n−p) 行列で (PQ) は (EH′) の列に置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & p & p+1 & \cdots\cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots\cdots & i_p & j_1 & \cdots\cdots & j_{n-p} \end{pmatrix}$ をほどこして得られるものである。従って，行列 P, Q の要素は行列 H′ の要素と，単位行列の要素だけである。

一方 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_p$ と $u_1', u_2', \cdots\cdots, u_p'$ は同じ W_p の basis であるから，ある正則な行列 B が存在して

$$B(PQ)=(EH)$$

故に　B P=E, したがって $B=P^{-1}$ また BQ=H であるから PH=Q よって行列 P の第 ℓ 列を行列 Q の第 k 列でおきかえた行列を R とし，これらの行列の行列式をそれぞれ |P|, |R| で表わせば，$|P| \neq 0$ であって

$$h_\ell^k = \frac{|R|}{|P|}$$

となる。よって h_ℓ^k は h'^t_s (t=1, 2,……, n−p ; s=1, 2,……, p) の解析関数となる。

次に　$f_{W_p}^{1\,2\,\cdots\cdots\,p}(A) = (x^1, x^2, \cdots\cdots, x^{n-p})$

$$f_{W_p}^{i_1\,i_2\,\cdots\cdots\,i_p}(A) = (y^1, y^2, \cdots\cdots, y^{n-p})$$

であるから，

$v^{*p+1} \mid W_p^\perp$, $v^{*p+2} \mid W_n^\perp$, ……, $v^{*n} \mid W_p^\perp$ の dual basis を w_1, w_2,……, w_{n-p}

$v^{*j_1} \mid W_p^\perp$, $v^{*j_2} \mid W_p^\perp$, ……, $v^{*j_{n-p}} \mid W_p^\perp$ の dual basis を w'_1, w'_2, ……, w'_{n-p}

とおくと，

$$x^1w_1+x^2w_2+\cdots\cdots+x^{n-p}w_{n-p}=y^1w'_1+y^2w'_2+\cdots\cdots+y^{n-p}w'_{n-p}$$

となる。

$$w_t=v_{p+t}-\sum_{\ell=1}^{p} h_\ell^t\, v_\ell \quad (t=1,2,\cdots\cdots,\ n-p)$$

$$w'_t=v_{jt}-\sum_{\ell=1}^{p} h'^{\,t}_\ell\, v_{i\ell} \quad (t=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-p)$$

であるから，行列でかけば

$$(w_1\ \ w_2\ \cdots\cdots\ w_{n-p})=(v_1\ \ v_2\ \cdots\cdots\ v_n)\begin{pmatrix}-H\\ E\end{pmatrix}$$

$$(w'_1\ w'_2\ \cdots\cdots\ w'_{n-p})=(v_{i_1}\ v_{i_2}\ \cdots\cdots\ v_{ip}\ v_{j_1}\ \cdots\cdots\ v_{jn-p})\begin{pmatrix}-H'\\ E\end{pmatrix}$$

$$=(v_1\ \ v_2\ \cdots\cdots\ v_n)\begin{pmatrix}R\\ S\end{pmatrix}$$

ここに $\begin{pmatrix}R\\ S\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}-H'\\ E\end{pmatrix}$ の行について置換 $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & p & p+1\cdots\cdots n\\ i_1 & i_2\cdots\cdots & i_p & j_1\cdots\cdots & j_{n-p}\end{pmatrix}$ をほどこしたものである。

よって$\begin{pmatrix}-H\\ E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^{n-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\\ S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\ y^2\\ \vdots\\ y^{n-p}\end{pmatrix}$

一方 $w_1, w_2, \cdots\cdots, w_{n-p}$; $w'_1, w'_2, \cdots\cdots, w'_{n-p}$ は共に $W_p^\perp$ の basis であるから

$$\begin{pmatrix}-H\\ E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\\ S\end{pmatrix}T$$

となるような $(n-p)$ 次の正則行列 T が存在する。

よって　$ST=E$　　$\therefore\ T=S^{-1}$

また RT=H であるから $RS^{-1}=-H$ ∴ $R=-HS$

$$\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -H \\ E \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-p} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} -H \\ E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -H \\ E \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-p} \end{pmatrix}$$

となって

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-p} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^{n-p} \end{pmatrix}$$ が得られる。

行列 S の要素は行列 H' の要素と単位行列の要素だけであるから $x^1, x^2, \cdots\cdots, x^{n-p}$ は $y^1, y^2, \cdots\cdots, y^{n-p}$ および h'^{t}_{s} $(t=1, 2, \cdots\cdots, n-p;$ $s=1, 2, \cdots\cdots, p)$ の解析関数である。

即ち $\Phi^{i1\ i2\ \cdots\cdots ip}\cdot(\Phi^{s1\ s2\ \cdots\cdots sp})^{-1}$ は解析的である。

参 考 文 献

1) N. Steenrod, Topology of Fibre Bundles, Princeton (1951)
2) 北村三郎, Grassmann 多様体の一つの基礎づけについて 久留米工業短期大学, 久留米工業高等専門学校研究報告 第5号 (1966)
3) S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall (1964)
4) S. S. Chern, Lectures on Integral Geometry. (1965)
5) J. R. Munkres, Elementary Differential Topology, Princeton (1963)