ファジィ集合の自然な解釈

下 田 守

序

「曖昧さ」を扱うファジィ理論は，ザデーによるファジィ集合の提唱[15]から始まった．ファジィ集合は，普通の集合の概念を拡張して，集合への所属度（帰属度）の真理値集合を真と偽の2値から実数の$[0,1]$区間全体に拡大したものである．この概念をもとにしたファジィ理論は，理論・応用ともに多方面にわたって発展してきた．

ところで，この理論で最も基本的なファジィ集合やファジィ論理の定義は多様で一通りではない．通常，ファジィ集合は，所属関数すなわちメンバーシップ関数と同一視されるか，定義は曖昧なままに所属関数で「特徴づけられる」と説明されることが多い．また，基本的な演算にもさまざまな定義が提案され，その数学的な意味は必ずしも十分には明らかでないと見受けられる．

本稿では，直観主義的集合論の階層モデルにおいて，通常のファジィ集合を拡張した概念としてファジィ集合とファジィ部分集合を定義して，所属関数との対応関係を明らかにした．また，包含関係・和集合・共通集合などファジィ集合の基本的な関係と演算について，このモデルでは普通の集合と同様に自然な意味をもつことを示した．

ファジィ理論と直観主義的集合論の関連についてはいくつかの文献があるが（[2][3][12][14]など），管見の限りでは，本稿のような自然な解釈は見当たらない．

1　直観主義的集合論の世界

ある完備ハイティング代数Hを固定する．完備ハイティング代数の基本的な性質については既知とする（[11][14] 等）．演算等の記号として，$\wedge, \vee, \bigvee, \bigwedge, \rightarrow, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \leq$ を用いる．$\mathbf{0}$ が最小元，$\mathbf{1}$ が最大元である．普通の集合（クリスプ集合）全体の類（クラス）をVとする．

以下，拙稿 [10] に従いつつ，Hを真理値集合とする直観主義的集合論の階層モデルを考え，基本的な性質の概要を示す．このモデルは [11][12] とほとんど同じで，[2][3][14] と本質的には同じである．対応する言語として，存在を表す 1 項述語記号 Eを伴う直観主義的集合論の体系を考える（[10][11][12]）．

定義 1.1　超限帰納法により，類 V^Hを次のように定義する．

$$V_0^H = \phi, \qquad V_\alpha^H = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^H \quad (\alpha\text{が極限順序数のとき}),$$

$$V_{\alpha+1}^H = \big\{ u = \langle |u|, Eu \rangle \,;\, |u| : \mathcal{D}u \longrightarrow H,\ \mathcal{D}u \subseteq V_\alpha^H,$$
$$Eu \in H,\ |u|(x) \leq Eu \wedge Ex \ \ (\forall x \in \mathcal{D}u) \big\}.$$

$$V^H = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^H.$$

この定義自体は [11][12] と全く同様であるが，次の定義では等式と限定命題の真理値のところが異なる．以下，$|u|$ を u と略記する．

定義 1.2　V^H上の閉論理式に対する真理値を次のように定義する．まず，原始論理式の定義は，(同時帰納法を用いて）次の式による．

$$\|Eu\| = Eu,$$

$$\|u \in v\| = \bigvee_{y \in \mathcal{D}v} (v(y) \wedge \|u = y\|),$$

$$\|u = v\| = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}u} (u(x) \rightarrow \|x \in v\|) \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{D}v} (v(y) \rightarrow \|y \in u\|) \wedge Eu \wedge Ev.$$

複合論理式の真理値は，次の各式によって帰納的に定義する．

$$\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\wedge\|\psi\|, \qquad \|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\|\vee\|\psi\|,$$

$$\|\varphi\to\psi\| = \|\varphi\|\to\|\psi\|, \qquad \|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\|,$$

$$\|\forall x\varphi(x)\| = \bigwedge_{u\in V^H}(Eu\to\|\varphi(x)\|), \quad \|\exists x\varphi(x)\| = \bigvee_{u\in V^H}(Eu\wedge\|\varphi(x)\|).$$

補題 1.1　論理式 $\varphi(a_1,\cdots,a_n)$ と $u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n\in V^H$ に対し，

$$\|u_1=v_1\|\wedge\cdots\|u_n=v_n\|\wedge\|\varphi(u_1,\cdots,u_n)\|\le\|\varphi(v_1,\cdots,v_n)\|.$$

定義 1.3　$u,v\in V^H$ とする．

(1) $\|u\subseteq v\| = \bigwedge_{x\in\mathcal{D}u}(u(x)\to\|x\in v\|)$.

(2) $u\sqsubseteq v \iff \|u\subseteq v\| = \mathbf{1}$.

(3) $u\sim v \iff u\sqsubseteq v$ かつ $v\sqsubseteq u$,

　$u\approx v \iff u\sim v$ かつ $Eu=Ev$.

(4) u が外延的 $\iff \|x=y\|\wedge u(x)\le u(y)\quad(\forall x,y\in\mathcal{D}u)$.

$u\sqsubseteq v$ のとき，u は V^H における v の部分集合であるという．また，$u\sim v$ のとき u と v は類似であるといい，$u\approx v$ のとき u と v は同等であるという．V^H 上の関係 $\sqsubseteq$ は擬順序，$\sim$ と $\approx$ は同値関係である．

補題 1.2　$u,v\in V^H$ とすると，次が成り立つ．

(1) $\|u=v\| = \|u\subseteq v\|\wedge\|v\subseteq u\|\wedge Eu\wedge Ev$.

(2) $u\sqsubseteq v \iff \|x\in u\|\le\|x\in v\|\quad(\forall x\in V^H)$.

(3) $u\approx v \iff \|u=v\| = Eu = Ev$.

(4) u が外延的 $\iff u(x) = \|x\in u\|\quad(\forall x\in\mathcal{D}u)$

　$\iff$ ある論理式 $\varphi(a)$ によって，$u(x)=\|\varphi(x)\|\quad(\forall x\in\mathcal{D}u)$.

定義 1.4　各 $x \in V$ に対し，$\check{x} \in V^H$ を次のように帰納的に定義する.

$$\mathcal{D}\check{x} = \{\check{y}\,;\, y \in x\},\quad E\check{x} = \mathbf{1},\quad \check{x}\,(\check{y}) = \mathbf{1} \quad (\forall y \in x).$$

この対応を V から V^H への標準的な埋め込みと呼ぶ. V の空集合 ϕ の埋め込み $\phi^\vee = \langle \phi, \mathbf{1} \rangle$ が V^H の空集合の役割を果たす.

命題 1.1　任意の束縛された式 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ と $x_1, \cdots, x_n \in V$ に対して，次が成り立つ.

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \Longleftrightarrow \|\varphi(\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n)\| = \mathbf{1},$$
$$\neg\varphi(x_1, \cdots, x_n) \Longleftrightarrow \|\varphi(\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n)\| = \mathbf{0}.$$

定義 1.5　$u, v \in V^H$ に対して $\{u, v\}^H$, $\langle u, v \rangle^H$, $(u \times v)^H$, $\bigcup^H u \in V^H$ を，それぞれ次のように定義する.

(1) $\mathcal{D}\{u, v\}^H = \{u, v\},\quad E\{u, v\}^H = Eu \vee Ev,$
$\{u, v\}^H(x) = Ex \quad (\forall x \in \{u, v\}).$

(2) $\langle u, v \rangle^H = \{\{u, u\}^H, \{u, v\}^H\}^H.$

(3) $\mathcal{D}(u \times v)^H = \{\langle x, y \rangle^H\,; x \in \mathcal{D}u,\, y \in \mathcal{D}v\},\quad E(u \times v)^H = Eu \wedge Ev,$
$(u \times v)^H(\langle x, y \rangle^H) = u(x) \wedge v(y) \quad (\forall x \in \mathcal{D}u, \forall y \in \mathcal{D}v).$

(4) $\mathcal{D}(\bigcup^H u) = \bigcup_{y \in \mathcal{D}u} \mathcal{D}y,\quad E(\bigcup^H u) = Eu,$
$(\bigcup^H u)(x) = \|\exists y \in u\,(x \in y)\| \quad (\forall x \in \mathcal{D}(\bigcup^H u)).$

上で定義された対・順序対・直積集合・和集合は外延的である. 以下，混乱の恐れがないときは，$\phi^\vee$ を ϕ，$\{u, v\}^H$ を $\{u, v\}$ などと略記する.

命題 1.2　任意の $x, y, u, v \in V^H$ に対して，次の各式が成り立つ.

(1) $\|x \in \{u, v\}^H\| = \|x = u\| \vee \|x = v\|.$

(2) $\|\langle u, v \rangle^H = \langle x, y \rangle^H\| = \|u = x\| \wedge \|v = y\|.$

(3) $\|\langle x, y \rangle^H \in (u \times v)^H\| = \|x \in u\| \wedge \|y \in v\|.$

(4) $\|x \in \bigcup^H u\| = \|\exists\, y \in u\,(x \in y)\|.$

定義 1.6　$u, v \in V^H$に対して，$u \cup v$, $u \cap v$, $u \backslash v \in V^H$ を，それぞれ次のように定義する．

(1)　$u \cup v = \bigcup^H \{u, v\}$．すなわち，

$\mathcal{D}(u \cup v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v$,　$E(u \cup v) = Eu \vee Ev$,

$(u \cup v)(x) = \|x \in u\| \vee \|x \in v\| \quad (\forall x \in \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v)$.

(2)　$\mathcal{D}(u \cap v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v$,　$E(u \cap v) = Eu \wedge Ev$,

$(u \cap v)(x) = \|x \in u\| \wedge \|x \in v\| \quad (\forall x \in \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v)$.

(3)　$\mathcal{D}(u \backslash v) = \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v$,　$E(u \backslash v) = Eu \vee Ev$,

$(u \backslash v)(x) = \|x \in u\| \wedge \neg \|x \in v\| \quad (\forall x \in \mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v)$.

ここで定義された和集合・共通集合・差集合もすべて外延的である．厳密には$u \cup^H v$などとかくが，煩雑なので上のように略記する．

命題 1.3　任意の $x, u, v, z \in V^H$に対して，次が成り立つ．

(1)　$\|x \in u \cup v\| = \|x \in u\| \vee \|x \in v\|$.

$u \sqsubseteq u \cup v$ かつ $v \sqsubseteq u \cup v$.

$u \sqsubseteq z$ かつ $v \sqsubseteq z$ ならば，$u \cup v \subseteq z$.

(2)　$\|x \in u \cap v\| = \|x \in u\| \wedge \|x \in v\|$.

$u \cap v \sqsubseteq u$ かつ $u \cap v \sqsubseteq v$.

$z \sqsubseteq u$ かつ $z \sqsubseteq v$ ならば，$z \sqsubseteq u \cap v$.

(3)　$\|x \in u \backslash v\| = \|x \in u\| \wedge \neg \|x \in v\|$.

$(u \cap v) \cup (u \backslash v) \sim u$ かつ $(u \cap v) \cap (u \backslash v) \sim \phi$.

$z \sqsubseteq u$ かつ $z \cap v \sim \phi$ ならば，$z \sqsubseteq u \backslash v$.

この集合演算について，文献 [10][11][14] などには記載されていないが，定義は極めて自然で，命題の証明も容易である．

V^Hが直観主義的集合論の公理をみたすことは，[11] とほとんど同様に証明できる．

2　Hファジィ集合

以下，空でない普通の（クリスプ）集合 X を一つ固定する.

定義 2.1

(1) V^H の元を H ファジィ集合という．$A \in V^H$ に対して，写像

$$\mu_A = \widehat{A} : X \longrightarrow H;\ \mu_A(x) = \|\check{x} \in A\| \quad (\forall x \in X)$$

を，集合 X 上の A の所属関数という.

(2) V^H における $\check{X}$ の部分集合を，X の H ファジィ部分集合という.
すなわち，A が X の H ファジィ部分集合 $\Longleftrightarrow A \sqsubseteq \check{X}$.

所属関数をメンバーシップ関数とも呼ぶ．X の H ファジィ部分集合を X の H ファジィ集合または単に X のファジィ集合という．$H = [0,1]$ の場合，X の H ファジィ部分集合の所属関数が，通常の X 上のファジィ集合に相当する.

定理 1　任意の写像 $\mu : X \longrightarrow H$ に対して，$\mu = \mu_A$ をみたす X の H ファジィ部分集合 A が存在する．すなわち，適当な $A \in V^H$ により，

$$A \sqsubseteq \check{X} \quad \text{かつ} \quad \mu = \mu_A = \widehat{A}.$$

証明.　写像 $\mu : X \longrightarrow H$ に対し $A = \tilde{\mu} \in V^H$ を次のように定める.

$$\mathcal{D}A = \{\check{x}\,;x \in X\},\ \ EA = \bigvee_{x \in X} \mu(x),\ \ A(\check{x}) = \mu(x)\ \ (\forall x \in X).$$

$\mathcal{D}A = \mathcal{D}\check{X}$ だから，明らかに $A \sqsubseteq \check{X}$．また，任意の $x \in X$ に対して，

$$\mu_A(x) = \|\check{x} \in A\| = \bigvee_{u \in \mathcal{D}A} A(y) \wedge \|\check{x} = u\|$$
$$= \bigvee_{y \in X} A(y) \wedge \|\check{x} = y\| = \mu(x).$$

定義 2.2 $\mu, \nu : X \longrightarrow H$ とする.

(1) $\mu \le \nu \Longleftrightarrow \mu(x) \le \nu(x) \quad (\forall x \in X)$.

(2) 写像 $\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$, $\neg\, \mu : X \longrightarrow H$ を，次の各式で定義する.

$$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) \quad (\forall x \in X),$$
$$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) \quad (\forall x \in X),$$
$$(\neg\, \mu)(x) = \neg\, \mu(x) \quad (\forall x \in X).$$

これは，通常のファジィ集合における包含関係および集合演算の定義に相当する．ただし，補集合は直観主義論理の否定に対応するもので，直観主義的補集合と呼ばれ，通常のザデーの補集合の定義とは異なる（[6][14]）.

定理 2 任意の H ファジィ集合 A, B に対して，

$$\mu_A \le \mu_B \Longleftrightarrow A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X}\,.$$

証明. $A, B \in V^H$ とすると，補題 1.2(2) と命題 1.3(2) より，

$$A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X} \Longleftrightarrow \|u \in A \cap \check{X}\,\| \le \|u \in B \cap \check{X}\,\| \quad (\forall u \in V^H)$$
$$\Longleftrightarrow \|u \in A\| \wedge \|u \in \check{X}\,\| \le \|u \in B\| \wedge \|u \in \check{X}\,\| \quad (\forall u \in V^H).$$

任意の $u \in V^H$ に対して，

$$\|u \in A\| \wedge \|u \in \check{X}\,\| = \bigvee_{x \in X} (\|u \in A\| \wedge \|u = \check{x}\,\|)$$
$$= \bigvee_{x \in X} (\|\,\check{x} \in A\| \wedge \|u = \check{x}\,\|) = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \|u = \check{x}\,\|).$$

同様に，

$$\|u \in B\| \wedge \|u \in \check{X}\,\| = \bigvee_{x \in X} (\mu_B(x) \wedge \|u = \check{x}\,\|).$$

ここで，$\mu_A \leq \mu_B$と仮定すると，任意の$u \in V^H$に対して，

$$\|u \in A\| \wedge \|u \in \check{X}\| = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \|u = \check{x}\|)$$
$$\leq \bigvee_{x \in X} (\mu_B(x) \wedge \|u = \check{x}\|) = \|u \in B\| \wedge \|u \in \check{X}\|.$$

したがって，$A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X}$.

逆に，$A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X}$ とすると，任意の$x \in X$に対し，

$$\mu_A(x) = \|\check{x} \in A\| = \|\check{x} \in A\| \wedge \|\check{x} \in \check{X}\|$$
$$\leq \|\check{x} \in B\| \wedge \|\check{x} \in \check{X}\| = \|\check{x} \in B\| = \mu_B(x).$$

したがって，$\mu_A \leq \mu_B$.

定理 3　XのHファジィ部分集合A, Bに対し，次が成り立つ.

(1) $\mu_A \leq \mu_B \iff A \sqsubseteq B$.

(2) $\mu_A = \mu_B \iff A \sim B$.

証明.　$A, B \sqsubseteq \check{X}$ とする.

(1) $A \sqsubseteq B$とすると，命題1.3 (2) より$A \cap \check{X} \sqsubseteq A$ かつ $B \sqsubseteq B \cap \check{X}$となり，関係$\sqsubseteq$は推移的だから，$A \cap \check{X} \sqsubseteq A \sqsubseteq B \sqsubseteq B \cap \check{X}$.

逆に，$A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X}$ とすると，上と同様に $A \sqsubseteq A \cap \check{X}$ かつ $B \cap \check{X} \sqsubseteq B$ が成り立つから，$A \sqsubseteq A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X} \sqsubseteq B$.

以上により，$A \sqsubseteq B \iff A \cap \check{X} \sqsubseteq B \cap \check{X}$.

これに定理2を組み合わせればよい.

(2) (1) より，$\mu_A = \mu_B \iff A \sqsubseteq B$ かつ $B \sqsubseteq A \iff A \sim B$.

定理1と定理3をまとめると，集合XからHへの写像の全体と，XのHファジィ部分集合の類似関係による同値類の全体との間に，順序（包含関係）を保存する1対1対応があることが分かる．すなわち，写像$\mu : X \longrightarrow H$に対して，定理1の証明の中と同様に$A = \widetilde{\mu} \in V^H$を定義すると，次の定理が成り立つ.

定理 4

(1) 写像 $\mu : X \longrightarrow H$ に対して，$\widehat{\widetilde{\mu}} = \mu$.

(2) X の H ファジィ部分集合 A に対し，$\widetilde{\mu_A} \sim A$. すなわち，$\widetilde{\widehat{A}} \sim A$.

(3) 写像 $\mu, \nu : X \longrightarrow H$ に対して，$\mu \leq \nu \Longleftrightarrow \widetilde{\mu} \sqsubseteq \widetilde{\nu}$.

証明. $\mu, \nu : X \longrightarrow H,\ A \in V^H$ とする.

(1) 定理 1の証明より明らか.

(2) $\widetilde{\mu_A} = B$ とすると，$\mu_B = \mu_A$ だから，定理 3(2) より，$B \sim A$.

(3) $\widetilde{\mu} = A, \widetilde{\nu} = B$ とすると，定理 1より $\mu_A = A, \mu_B = B$ だから，
定理 3(1) より，$\mu \leq \nu \Longleftrightarrow A \sqsubseteq B$.

定理 5 任意の H ファジィ集合 A, B に対して，次の各式が成り立つ.

(1) $\mu_{A \cup B} = \mu_A \vee \mu_B$.

(2) $\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$.

(3) $\mu_{\check{X} \setminus A} = \neg \mu_A$.

証明. $A, B \in V^H,\ x \in X$ とする.

(1) 命題 1.3 (1) より，

$$\mu_{A \cup B}(x) = \|\check{x} \in A \cup B\| = \|\check{x} \in A\| \vee \|\check{x} \in B\| = \mu_A(x) \vee \mu_B(x).$$

(2) 命題 1.3 (2) より，

$$\mu_{A \cap B}(x) = \|\check{x} \in A \cap B\| = \|\check{x} \in A\| \wedge \|\check{x} \in B\| = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x).$$

(3) 命題 1.3 (3) より，

$$\begin{aligned}\mu_{\check{X} \setminus A}(x) &= \|\check{x} \in \check{X} \setminus A\| = \|\check{x} \in \check{X}\| \wedge \neg \|\check{x} \in A\| \\ &= \neg \|\check{x} \in A\| = \neg \mu_A(x).\end{aligned}$$

この定理は，X の H ファジィ部分集合だけでなく，一般の H ファジィ集合についても，X 上の所属関数を与える対応が基本的な集合演算を保つことを示している.

結

前節の諸結果によって，所属関数によって定義される通常の集合 X 上のファジィ集合と，直観主義的集合論のモデル V^H に埋め込まれた，集合 X の H ファジィ部分集合（の同値類）との間に，包含関係および和集合・共通集合・補集合の演算を保つ自然な対応が存在することが明らかとなった．

しかし，補集合については，ファジィ集合において自然に対応するのはザデーの補集合演算ではなく，直観主義論理の否定に対応する直観主義的補集合である．このことは，普通の集合の拡張としてファジィ集合を考える限りでは，ザデーの補集合よりも直観主義的補集合の方がより自然であることを示している．

ザデーの補集合演算は，X から $I = [0,1]$ への写像 μ に対して，$\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$ $(\forall x \in X)$ で定まる写像 $\overline{\mu}$ を対応させるものであり，その定義は $I = [0,1]$ の代数構造に依存している．この演算は，普通の和集合と共通集合よりも，代数和・代数積の二演算とともに扱う方が自然であり，直観主義的集合論にこれらの代数的演算を組み入れた体系も調べられている（[14]）．

本稿の H ファジィ部分集合の所属関数は，一般の半順序集合 L に対する L ファジィ集合（[5][6]）の特別な場合に当たる．ここでは扱っていないが，上の自然な対応を拡張して，ファジィ関係などについても，直観主義的集合論のモデルで同様に自然な解釈が成り立つことが分かる．本稿のように全体集合を特定せずに一般的なファジィ集合を定義することは，通常のファジィ集合の概念を拡張する一つの方向を示すものと考えられる．

参考文献

[1] G. J. Klir and T. A. Folger, 本多中二訳, ファジィ情報学, 日刊工業新聞社, 1993.（原題：*Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall, 1988.）

[2] 小寺平治, ファジィの数学的基礎づけ, 日本ファジィ学会誌, 6(6), 1057–1066, 1994.

[3] H. Kodera, [0,1]-valued sheaf model of an intuitionistic set theory and fuzzy groups, *Bulletin of Aichi Univ. of Education*, 44 (Natural Science) , 9–23, 1995.

[4] 小寺平治, 入門＝ファジィ数学, 遊星社, 1995.

[5] 水本雅晴, ファジイ理論とその応用, Information & Computing 19, サイエンス社, 1988.

[6] 水本雅晴編著, ファジィ集合, 講座ファジィ 第２巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[7] 向殿政男, ファジィ論理, 講座ファジィ 第４巻, 日刊工業新聞社, 1993.

[8] 西田俊夫・竹田英二, ファジィ集合とその応用, 数学ライブラリー 48, 森北出版, 1978.

[9] 坂和正敏, ファジィ理論の基礎と応用, 森北出版, 1989.

[10] M. Shimoda, Categorical aspects of Heyting-valued models for intuitionistic set theory, *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli*, 30(1), 17–35, 1981.

[11] 竹内外史，直観主義的集合論, 紀伊國屋数学叢書 20, 紀伊國屋書店, 1980.

[12] G. Takeuti and S. Titani, Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory, *J. Symbolic Logic*, 49(3), 851–866, 1984.

[13] 田中英夫, ファジィモデリングとその応用, システム制御情報ライブラリー2, 朝倉書店, 1990.

[14] 千谷慧子, ファジィの数学的基礎, 講座ファジィ 第1巻, 日刊工業新聞社, 1992.

[15] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338–353, 1965.